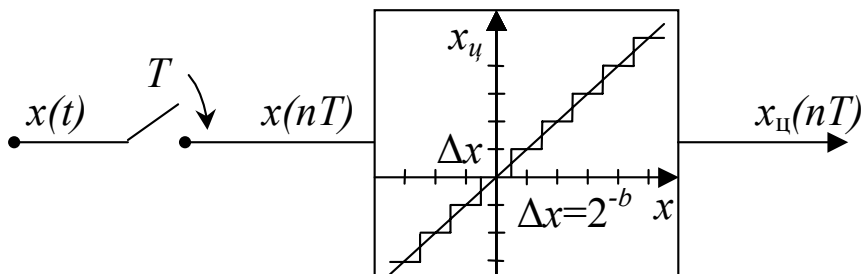


Д.В. Бушнев А.В. Романов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Учебное пособие



Воронеж 2005

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный технический
университет

Д.В. Бушнев А.В. Романов

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2005

УДК 681.3

Бушнев Д.В., Романов А.В. Теоретические основы цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие. Воронеж: Воронеж. гос. техн. ун-т, 2005. 116 с.

В учебном пособии рассмотрены основные положения теории цифровой обработки сигналов с примерами по определению временных и частотных характеристик цифровых сигналов и систем. Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 651900 "Автоматизация и управление", специальности 220201 "Управление и информатика в технических системах", дисциплинам "Цифровая обработка сигналов" и "Цифровая обработка сигналов в информационно-управляющих системах".

Материал учебного пособия может быть использован при выполнении контрольных заданий, лабораторных работ, дипломного проектирования, в студенческой научной работе.

Табл. 3. Ил. 46. Библиогр.: 8 назв.

Научный редактор — канд. техн. наук, доц. С.А. Ткалич

Рецензенты: кафедра технической кибернетики и автоматического регулирования (зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Г.И. Лозгачев);
канд. техн. наук, доц. Ю.С. Слепокуров

© Бушнев Д.В., Романов А.В., 2005
© Оформление. Воронежский государственный технический университет, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Методы *цифровой обработки сигналов* (ЦОС) находят все более широкое применение, постепенно вытесняя методы, основанные на аналоговой обработке [4]. Наличие широкого спектра задач ЦОС привело к появлению *сигнальных процессоров DSP (digital signal processing)*, которые, обладая приспособленной для ЦОС архитектурой, позволяют создавать эффективные системы управления. Управляющие микропроцессоры вырабатывают решение *периодически*. Поэтому микропроцессорные системы управления относят к цифровым и импульсным системам и объединяют названием *дискретные системы автоматического управления* (дискретные САУ).

Интенсивное развитие методов и техники цифровой обработки сигналов объясняется большим числом ее преимуществ, главными из которых являются:

- гарантированная точность обработки;
- воспроизводимость результатов;
- отсутствие таких дестабилизирующих факторов, присущих аналоговым устройствам, как температурный и временной дрейф, разброс параметров, воздействие наводок и помех;
- возможность программной реализации алгоритмов обработки информации;
- возможность настройки системы управления путем изменения параметров объекта управления;
- возможность создания адаптивных систем с перестраиваемой структурой;
- простота настройки без использования трудоемких и прецизионных операций (подгонка образцовых резисторов).

В **первой** главе учебного пособия приведены основные понятия дискретного и цифрового сигналов, их основные характеристики и методы анализа.

Во **второй** главе рассматриваются структурные схемы, передаточные функции, временные и частотные характеристики, устойчивость и реализуемость дискретных систем.

В **третьей** главе излагаются эффекты квантования и округления, связанные с цифровым представлением сигналов и цифровой реализацией дискретных звеньев.

Четвертая глава посвящена методам быстрого преобразования Фурье, широко использующимся на практике, а также принципам построения цифро-аналоговых преобразователей (ЦАП) и аналого-цифровых преобразователей (АЦП).

Материал учебного пособия ориентирован на изучение студентами специальностей "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем", "Управление и информатика в технических системах", дисциплин, связанных с цифровой обработкой сигналов, а также учебное пособие может быть полезно студентам других специальностей, изучающих современные дискретные системы управления.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИГНАЛА

Под *сигналом* понимают физический процесс, протекающий во времени, отображающий некоторую информацию или сообщение.

Аналоговый сигнал (АС) описывается непрерывной или кусочно-непрерывной функцией $x(t)$, которая может принимать некоторые значения по амплитуде и времени (рис. 1.1, а).

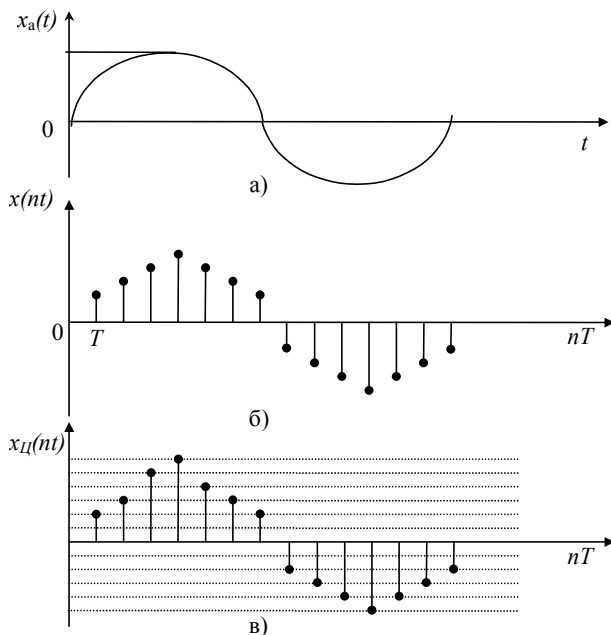


Рис. 1.1. Аналоговый, дискретный и цифровой сигнал

Дискретный сигнал (ДС) – это последовательность *отсчетов* (*выборок*) аналогового сигнала, взятых в дискретные моменты времени $t = nT$, где $T = const$ – *интервал дискретизации*, n – номер отсчета, целое число, характеризующее дискретное время (рис. 1.1, б). При этом предполагается, что $x(nT) = 0$ при $n < 0$. Дискретные сигналы описываются *решетчатыми* функциями $x(nT)$. Значения дискретного сигнала $x(nT)$

называются *отсчетами* и представляют собой выборки исходного сигнала $x(t)$ в моменты времени $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$x(nT) = x_a(t)|_{t=nT}. \quad (1.1)$$

Выборки сигнала берутся с интервалом T , т.е. с определенной частотой, называемой *частотой дискретизации* f_δ , и *круговой частотой дискретизации* ω_δ :

$$f_\delta = \frac{1}{T}; \quad \omega_\delta = 2\pi \cdot f_\delta = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Цифровые сигналы (ЦС) представляют собой *квантованные по уровню* дискретные сигналы (рис. 1.1, в) и описываются *квантованными решетчатыми функциями* (квантованными последовательностями) $x_{Ц}(nT)$, принимающими в дискретные моменты nT значение из конечного ряда уровней квантования h_1, h_2, \dots, h_N . Связь между решетчатой функцией $x(nT)$ и квантованной решетчатой функцией $x_{Ц}(nT)$ определяется нелинейной функцией квантования $x_{Ц}(nT) = F_K(x(nT))$. Существуют различные способы выбора функции квантования. В простейшем случае, когда используется квантование с постоянным шагом $\Delta h = h_1 - h_{l-1} = \text{const}$, функция квантования имеет вид [1]:

$$x_{Ц}(nT) = F_K(x(nT)) = \begin{cases} h_1 & \text{при } x(nT) \leq (h_2 + h_1)/2, \\ h_l & \text{при } \frac{h_l + h_{l-1}}{2} < x(nT) \leq \frac{h_{l+1} + h_l}{2}, \\ h_N & \text{при } (h_N + h_{N-1})/2 < x(nT). \end{cases} \quad (1.3)$$

Выбирается *формат оцифровки* r . Обычно он бывает кратным 8, хотя это не обязательно. Предположим, что существует такое число M , что выполнены неравенства: $-M \leq x[n] \leq M$ для всех n . Интервал $[-M, M]$ разбивается на 2^r частей. После этого каждое значение $x[n]$ заменяется номером интервала, в который попало соответствующее значение. В результате последовательность $x[n]$ заменяется новой последовательностью $y[n]$, но теперь каждый член новой последовательности принимает значения из интервала $[0, (2^r - 1)]$. При жела-

нии вместо указанного представления можно перейти к представлению сигнала целыми числами со знаком.

На каждом из упомянутых шагов происходит огрубление сигнала. Первая задача цифровой обработки заключается в оценке искажения исходного сигнала. Дальнейшая обработка состоит в извлечении из полученного сигнала нужной информации и подавлении шумов. Это осуществляется с помощью цифровой фильтрации. Даже оцифрованный сигнал занимает много места, и следующий шаг обработки заключается в сжатии сигнала. Обычно имеется в виду сжатие с потерей информации. Здесь важно установить критерии допустимой потери информации. В зависимости от выбранного критерия выбирается способ сжатия. Хотя последовательность бесконечна, в реальных условиях мы имеем дело лишь с конечными последовательностями. В этой связи нужна оценка потерь, связанных с усечением последовательностей.

Дискретные сигналы, как и непрерывные, можно разделить на два больших класса: *детерминированные (регулярные)* ДС и *случайные* ДС. Детерминированные сигналы, в свою очередь, разделяются на *периодические* и *непериодические*.

К периодическим сигналам относятся сигналы, повторяющиеся через равные промежутки времени T_c :

$$x(nT) = x(nT + T_c), \quad (1.4)$$

где T_c – период сигнала, это наименьший промежуток времени, по истечении которого сигнал повторяется.

Непериодические сигналы разделяются на *затухающие* и *незатухающие*, а затухающие – на ограниченные во времени (*финитные*) и неограниченные (*бесконечные*). Периодические и непериодические незатухающие ДС, очевидно, также являются бесконечными.

По спектральной структуре ДС разделяются на *широкополосные* (низкочастотные или видеосигналы) и *узкополосные* (высокочастотные или радиосигналы) [1]. Последние отличаются большим отношением средней частоты к ширине спектра, а у

широкополосных сигналов это отношение близко к единице, поэтому такие сигналы называют *сигналами без несущей частоты*.

Кроме того, дискретные сигналы могут быть вещественными и комплексными. Комплексный ДС представляет собой упорядоченную пару вещественных ДС, соответствующих реальной и мнимой частям комплексного ДС. Графически комплексные ДС можно представить как пару вещественных ДС на оси дискретного времени или как один сигнал на комплексной плоскости.

1.1. Спектры дискретных сигналов

Для описания аналоговых и дискретных сигналов в частотной области используется аппарат преобразования Фурье.

Периодические сигналы при математическом описании могут быть представлены в виде ряда Фурье, состоящего из простых гармонических сигналов с циклическими частотами, кратными основной циклической частоте $\omega_c = 2\pi / T_c$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_c t + b_k \sin k\omega_c t = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_c t + \varphi_k), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$, k – номер гармонической составляющей сигнала.

Коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам Эйлера-Фурье:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} f(t) \cos k\omega_c t dt; \\ b_k &= \frac{2}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} f(t) \sin k\omega_c t dt. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, гармонический анализ периодического сигнала осуществляет переход от функции времени $f(t)$ к функции частоты $F(\omega)$. Функция $F(\omega)$ в этом случае является дискретной и комплексной, поскольку она определена для дискретных частот $\omega = k\omega_c$, имеет амплитуду A_k и фазу φ_k . Такие функции представляют комплексными числами, используя формулу Эйлера:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (1.7)$$

откуда можно получить $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$.

Спектром $F(\omega)$ аналогового сигнала называется прямое преобразование Фурье [1]:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Функция $F(\omega)$ или ее модуль характеризует интенсивность исходного сигнала на частоте ω . Для аналоговых непериодических сигналов $f(t)$ спектр $F(\omega)$ является непрерывной непериодической комплексной функцией.

Формула для непериодических сигналов имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.9)$$

и называется интегралом Фурье или обратным преобразованием Фурье.

Переход от аналоговых к дискретным сигналам осуществляется введением дискретного времени $t = nT$, а интегралы заменяются суммой. Пара преобразований Фурье для решетчатой функции (дискретной последовательности) имеет вид:

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega nT}; \quad (1.10)$$

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.11)$$

Свойства спектра дискретной последовательности.

1) Из формулы 1.10 следует, что спектр дискретной последовательности $F(\omega)$ является периодической функцией по частоте ω с периодом, равным частоте дискретизации: $\omega_\delta = 2\pi/T$, поскольку $e^{j\omega nT} = e^{j(\omega+\omega_\delta)nT}$.

На рис. 1.2 показано условное изображение модуля спектра дискретной последовательности. *Основным прямым спектром* называют часть спектра $F(\omega)$, расположенную в области нижних частот $\omega [0 .. \omega_\delta/2]$, а *основным инверсным спектром* – часть спектра $F(\omega)$ в области частот $\omega [-\omega_\delta/2 .. 0]$.

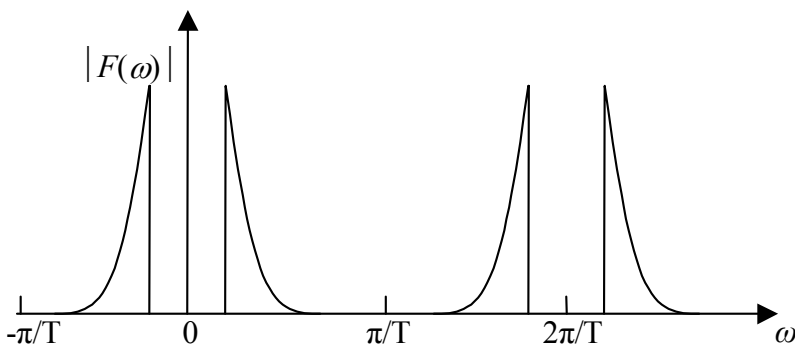


Рис. 1.2. Модуль спектра дискретного сигнала

2) Спектр дискретного сигнала обладает свойством линейности:

$$F(a_1x(nT) + a_2y(nT)) = a_1F(x(nT)) + a_2F(y(nT)). \quad (1.12)$$

3) При сдвиге спектра $F(\omega)$ последовательности $f(nT)$ по оси частот вправо на величину ω_1 получаем спектр $Y(\omega)$ периодического сигнала $y(nT)$:

$$y(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} Y(\omega) e^{j\omega nT} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega - \omega_1) e^{j\omega nT} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{-j\omega_1 n T} e^{j\omega n T} d\omega = \\
&= e^{-j\omega_1 n T} \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} F(\omega) e^{j\omega n T} d\omega = e^{-j\omega_1 n T} f(nT).
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Следовательно, сдвиг спектра по оси частот соответствует умножению последовательности $f(nT)$ на последовательность $e^{j\omega_1 n T}$.

4) При сдвиге дискретного сигнала $f(nT)$ вправо (задержка по времени) на n_1 отсчетов получаем сигнал $y(nT) = f(nT - n_1 T)$ и согласно формуле 1.10 имеем спектр:

$$Y(\omega) = e^{-j\omega n_1 T} F(\omega). \tag{1.14}$$

1.2. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами

Пусть имеется аналоговый сигнал $x(t)$ и выбран шаг дискретизации T . При помощи дискретизации функция $x(t)$ заменяется последовательностью $y[n] = x(nT)$. Восстановление аналогового сигнала $x(t)$ по его дискретному представлению $y[n] = x(nT)$ сводится к использованию различных интерполяционных процедур.

Предположим, что аналоговый сигнал $x(t)$ имеет ограниченный (финитный) спектр $X(\omega)$: $|\omega| \geq \omega_0 \rightarrow X(\omega) = 0$ для некоторого ω_0 (рис. 1.3). Выберем T таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} < \frac{\pi}{\omega_0}. \tag{1.15}$$

В этом случае функция $X(\omega)$ однозначно определяется функцией $Y(\omega)$. Значение ω_0/π называется *частотой выборки Найквиста*. Если частота выборки больше указанной величины, то спектр непрерывного сигнала может быть восстановлен

по спектру дискретного. Позже будет показано, что и сам непрерывный сигнал восстанавливается по дискретному.

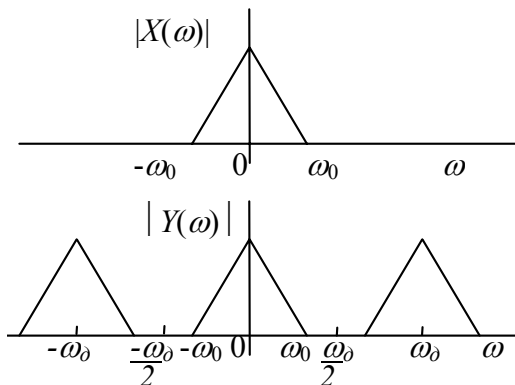


Рис. 1.3. Модуль спектра $|X(\omega)|$ непрерывного сигнала и модуль спектра $|Y(\omega)|$ дискретного сигнала

Теорема Котельникова-Шеннона

Если исходный аналоговый сигнал $x(t)$ имеет ограниченный (финитный) спектр $X(\omega)$ и выполнено условие 1.15, то непрерывный сигнал можно восстановить по дискретному [2].

Доказательство. Пусть спектр сигнала находится в интервале $[-\omega_0, \omega_0]$. Тогда

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Функцию, заданную на конечном интервале, можно разложить в ряд Фурье: $X(\omega) = \sum c_n e^{-j2\pi n\omega/2\omega_0}$, где

$$c_n = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{X(\omega) 2\pi e^{j2\pi n\omega/2\omega_0} d\omega}{2\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right).$$

Таким образом,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum c_n \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega(t - \frac{n\pi}{\omega_0})} d\omega = \frac{\pi}{2\pi\omega_0} \sum x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \times$$

$$\times \frac{e^{j\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)} - e^{-j\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)}}{t - \frac{n\pi}{\omega_0}} = \sum x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin \omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)}{\omega_0\left(t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right)}.$$

Положив $T = \pi/\omega_0$, получим

$$x(t) = \sum x(nT) \frac{\sin(\omega_0(t - nT))}{\omega_0(t - nT)}. \quad (1.16)$$

Обратим внимание, что в (1.15) должно выполняться строгое неравенство, если мы хотим, чтобы утверждение оставалось верным и для сигналов с преобразованием Фурье в виде обобщенной функции.

В качестве примера рассмотрим $x(t) = \sin(2\pi t)$. Спектр сигнала сосредоточен на интервале $[-1, 1]$. Положим $\omega_0 = 2\pi$, тогда $T = 1/2$, но последовательность $x(nT)$ оказывается нулевой. То есть непрерывный сигнал не удастся восстановить по дискретным значениям. Если же $T < 1/2$, то можно воспользоваться формулой (1.16).

Спектр $Y(\omega)$ последовательности $y[n] = x(nT)$, полученный в результате дискретизации с частотой $\omega_0 = 2\pi/T$ аналогового сигнала $x(t)$, и спектр $X(\omega)$ последнего связаны соотношением:

$$Y(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + k\omega_0)). \quad (1.17)$$

Спектр последовательности $y[n] = x(nT)$ (с точностью до постоянного множителя $1/T$) равен сумме спектров аналогового сигнала $x(t)$, смещенных друг относительно друга на все возможные значения частоты, кратные частоте дискретизации. Соотношение (1.17) получается путем вычисления (1.9) для $t=nT$,

причем интеграл с бесконечными пределами заменяется бесконечной суммой интегралов на интервалах величиной $2\pi/T$.

Если граничная частота ω_0 спектра не удовлетворяет условию (1.15), или частота ω_0 выбрана недостаточно высокой, то при дискретизации происходит наложение спектров (рис. 1.4), т.е. дискретизация приводит к потере информации.

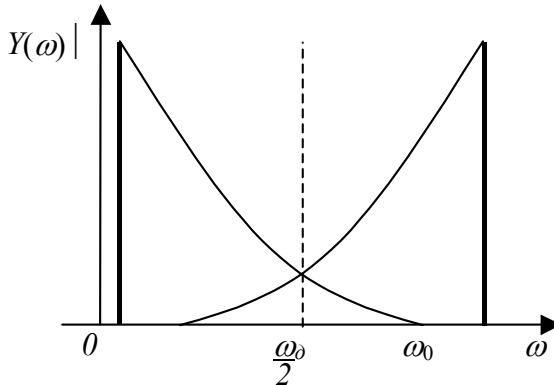


Рис. 1.4. Наложение спектров $|Y(\omega)|$ дискретного сигнала

В реальном мире сигналы с ограниченным спектром практически отсутствуют, или для практических целей интерес представляет только низкочастотная составляющая сигнала. Поэтому перед дискретизацией спектр ограничивается специальным фильтром нижних частот, называемым *антиэлластичным* фильтром. Основными требованиями, предъявляемыми к данному фильтру, являются отсутствие искажения в области пропускания, узкая переходная полоса и высокий уровень подавления в полосе затухания (80дБ и выше, в зависимости от разрядности квантования).

1.3. Дискретное преобразование Фурье

Пусть $x(nT)$ – периодическая последовательность с периодом NT (период – N отсчетов), т.е. $x(nT) = x(nT + mNT)$, где

m – целое. Дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) называют пару взаимно-однозначных преобразований [4]:

$$F(k) = F(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega nT}, k = 0, 1 \dots N-1; \quad (1.18)$$

$$x(n) = x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k\Omega)e^{jk\Omega nT}, n = 0, 1 \dots N-1, \quad (1.19)$$

где $\Omega = 2\pi/(NT)$ – основная частота преобразования, причем (1.18) определяет прямое ДПФ, а (1.19) – обратное ДПФ.

Вводя обозначение поворачивающего множителя

$$e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N} = W_N, \quad (1.20)$$

дискретное преобразование Фурье имеет вид:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)W_N^{kn}, k = 0, 1 \dots N-1; \quad (1.21)$$

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)W_N^{-kn}, n = 0, 1 \dots N-1. \quad (1.22)$$

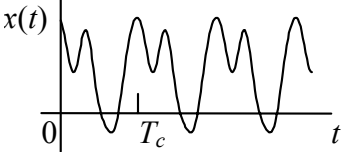
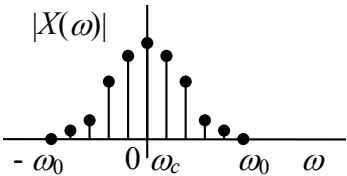
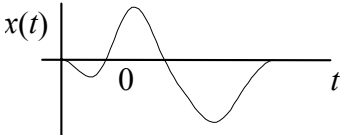
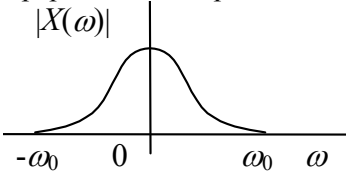
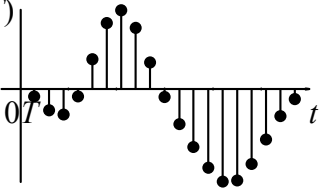
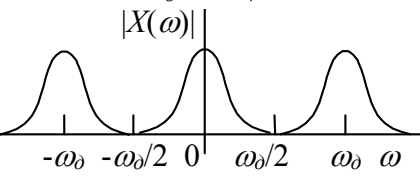
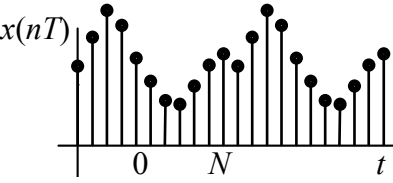
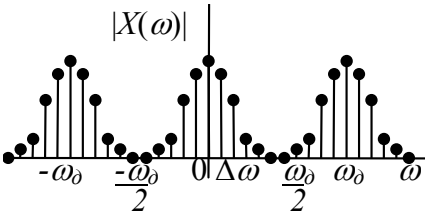
Дискретное преобразование Фурье $F(k)$, как и сама последовательность $x(nT)$, является дискретной периодической функцией по аргументу k с периодом N , так как $W_N^{kn} = W_N^{(k+mN)n}$, где m – целое. Дискретное преобразование Фурье может быть использовано и для представления последовательности конечной длины N , определенной при величине $n = 0, 1, 2 \dots N-1$ и равной нулю вне интервала $[0, N-1]$.

Если сравнить спектр конечного дискретного сигнала, определяемого формулой (1.10) (с учетом $x(nT)=0$ при $n < 0$ и $n > N-1$), и ДПФ этого сигнала (1.21), очевидно, что ДПФ представляет собой N отсчетов спектра, взятых на периоде с интервалом дискретизации, по частоте равным $\Omega = 2\pi/NT$. Поэтому свойства ДПФ аналогичны свойствам спектров.

Рассмотренные общие свойства спектров дискретных и непрерывных, периодических и непериодических сигналов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Сигналы и их спектры

Сигнал	Спектр Фурье
<p>Непрерывный периодический</p> 	<p>Дискретный непериодический</p> <p>$\omega_c = 2\pi / T_c$</p> 
<p>Непрерывный непериодический</p> 	<p>Непрерывный непериодический</p> 
<p>Дискретный непериодический</p> <p>$x(nT)$</p> 	<p>Непрерывный периодический</p> <p>$\omega_\delta = 2\pi / T$</p> 
<p>Дискретный периодический</p> <p>$N = T_0 / T$</p> 	<p>Дискретный периодический</p> <p>$\Delta\omega = \omega_\delta / N = 2\pi / T_0$</p> 

1.4. Z-преобразование

Для непрерывных сигналов преобразование Лапласа записывается в виде

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (1.23)$$

где p - оператор Лапласа. Подставляя в (1.23) непрерывный эквивалент дискретного сигнала $x(nT)$, интеграл переходит в сумму:

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}. \quad (1.24)$$

Введем комплексную переменную $z = re^{j\varphi} = e^{pT}$, получим преобразование дискретного сигнала вида [1]:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}. \quad (1.25)$$

Выражение (1.25) называется *односторонним* z -преобразованием дискретных сигналов. Комплексная функция (1.25) определена лишь для тех значений переменной z , при которых ряд сходится. Условием сходимости ряда (1.25) является

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)| r^{-n} < \infty. \quad (1.26)$$

Рассмотрим последовательность $x(nT) = a^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, причем $|a| < 1$. Последовательность в соответствии с (1.25) имеет z -образ:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (1.27)$$

Для определения нулей и полюсов функцию $X(z)$ преобразуем к виду без отрицательных степеней z : $X(z) = z/(z - a)$. Функция имеет один ноль в точке $z_1^0 = 0$ и один полюс в точке $z_1 = a$. Область сходимости здесь определяется радиусом круга $R=a$ в z -плоскости, вне которого $X(z)$ не имеет особых точек.

Свойства z-преобразования.

1) *Линейность.* Если последовательности $x(nT)$ и $d(nT)$ имеют соответственно z -преобразования $X(z)$ и $D(z)$, то при любых постоянных действительных коэффициентах a_1 и a_2 последовательность $y(nT) = a_1 x(nT) + a_2 d(nT)$ имеет z -преобразование:

$$Y(z) = a_1 X(z) + a_2 D(z). \quad (1.28)$$

2) *Сдвиг последовательности.* Если последовательность $x(nT)$ имеет z -преобразование $X(z)$ и $x(nT)=0$ при $n<0$, то последовательность $y(nT) = x((n-m)T)$, представляющая собой задержанную на m интервалов дискретизации последовательность $x(nT)$, имеет z -преобразование:

$$Y(z) = z^{-m} X(z). \quad (1.29)$$

Задержка сигнала на m интервалов дискретизации во временной области эквивалентна умножению на z^{-m} в z -области.

Например, $x(nT)=a^n$, $|a|<1$, и пусть $y(nT) = x(nT-2T)$, т.е. $y(nT) = a^n$, при $n \geq 2$. Поскольку, согласно (1.27), $X(z)=1/(1 - az^{-1})$, то $Y(z)=z^{-2}/(1 - az^{-1})$.

3) *Свертка последовательностей.* Если последовательности $x(nT)$ и $d(nT)$ имеют соответственно z -преобразования $X(z)$ и $D(z)$, то последовательность $y(nT) = x(nT) * d(nT)$, представляющая собой свертку исходных последовательностей

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)d(nT - kT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(nT - kT)d(kT), \quad (1.30)$$

имеет z -преобразование

$$Y(z) = X(z)D(z). \quad (1.31)$$

Свертка сигналов во временной области эквивалентна умножению z образов в z -области.

Обратное z -преобразование ставит в соответствие функции комплексной переменной $X(z)$ дискретную последовательность $x(nT)=Z^{-1}(X(z))$, определяемую по формуле

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz, \quad (1.32)$$

где c – контур, расположенный в области сходимости $X(z)z^{n-1}$ и охватывающий начало координат в z -плоскости. Контурный интеграл (1.32) удобно вычислить с помощью *теоремы о вычетах*: функция $x(nT)$ определяется суммой вычетов подынтегральной функции в полюсах, расположенных в области, охватываемой контуром c [1]:

$$x(nT) = \sum_{z_k} \text{Res}_{z_k} (X(z)z^{n-1}). \quad (1.33)$$

В случае простого полюса вычет в точке $z = z_k$ определяется соотношением

$$\text{Res}_{z_k} (X(z)z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow z_k} ((z - z_k)X(z)z^{n-1}). \quad (1.34)$$

Например, $X(z) = b/(1 - az^{-1})$. Для нахождения соответствующей последовательности $x(nT)$ необходимо:

- 1) Определить подынтегральную функцию (1.32)
 $X(z)z^{n-1} = bz^{n-1}/(1 - az^{-1}) = bz^n/(z - a)$.
- 2) Найти полюсы подынтегральной функции. В данном случае имеется один полюс в точке $z_1 = a$.
- 3) Вычислить вычет в точке $z_1 = a$ по формуле (1.34), определив тем самым последовательность

$$x(nT) = \lim_{z \rightarrow a} (b(z - a)z^n/(z - a)) = ba^n. \quad (1.35)$$

Если $X(z)$ рациональная функция, можно вычислить обратное z -преобразование путем разложения $X(z)$ на простые дроби:

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}. \quad (1.36)$$

В этом случае, используя свойство линейности и (1.35), находим

$$x(nT) = \sum_{k=1}^N \beta_k (\alpha_k)^n. \quad (1.37)$$

Например, $X(z) = 1/(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})$. Разложим $X(z)$ на простые дроби: $X(z) = -\frac{2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 3z^{-1}}$. Согласно (1.37) соот-

ветствующая дискретная последовательность имеет вид: $x(nT) = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n$. При использовании формулы (1.34) коэффициенты β_k определяются при вычислении вычета как:

$$X(z) = \frac{z^{n-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{z^2 z^{n-1}}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z \cdot z^n}{(z-2)(z-3)};$$

$$\text{Res}_2(X(z)z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)z \cdot z^n}{(z-2)(z-3)} = -2 \cdot 2^n;$$

$$\text{Res}_3(X(z)z^{n-1}) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z-3)z \cdot z^n}{(z-2)(z-3)} = 3 \cdot 3^n.$$

Примеры дискретных сигналов и их z -образы.

Важное значение в цифровой обработке сигналов имеют единичный импульс $\delta(nT)$ (дискретная дельта-функция) и единичный скачок $u(nT)$, аналитическое выражение и z -образы приведены в табл. 1.2. Единичный импульс $\delta(nT)$ связан с единичной последовательностью $u(nT)$ соотношением:

$$u(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(nT - kT). \quad (1.38)$$

Для многих функций времени z -преобразование можно получить в замкнутом виде. Рассмотрим z -преобразование экспоненты. Пусть $x(nT) = e^{anT}$, тогда в соответствии с (1.25) получим

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} z^{-n}. \quad (1.39)$$

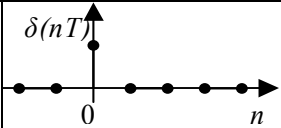
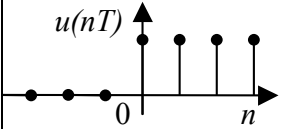
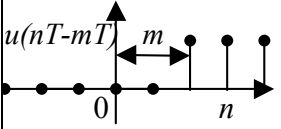
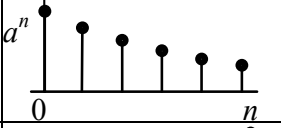
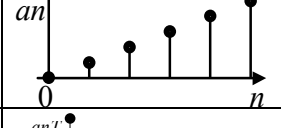
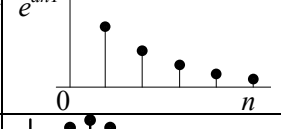
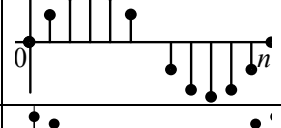
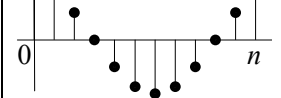
$$\text{Сумма } S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} z^{-n} = 1 + e^{aT} z^{-1} + e^{2aT} z^{-2} + e^{3aT} z^{-3} + \dots$$

представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию, первый член которой $a=1$, а знаменатель $q=e^{aT}z^{-1}$. Поэтому сумма может быть представлена в замкнутом виде:

$$X(z) = S(z) = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}e^{aT}}. \quad (1.40)$$

Таблица 1.2

Дискретные сигналы и z-образы

Сигнал	Графический вид	Аналитическая запись	Z-образ. $X(z)$
Единичный импульс		$\delta(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$	1
Единичный скачок		$u(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
Задержанный скачок		$u(nT) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq m, \\ 0 & \text{при } n < m \end{cases}$	$\frac{z^{-m}}{1-z^{-1}}$
Показательная функция		a^n , где $ a < 1$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$a \cdot n$		$a \cdot n$	$\frac{az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
Экспонента		e^{anT}	$\frac{1}{1-e^{aT}z^{-1}}$
Синус		$\sin(\omega nT)$	$\frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{z^{-2} - 2\cos(\omega T)z^{-1} + 1}$
Косинус		$\cos(\omega nT)$	$\frac{(1-\cos(\omega T))z^{-1}}{z^{-2} - 2\cos(\omega T)z^{-1} + 1}$

С помощью формулы (1.40) можно вывести выражение z -преобразований тригонометрических и гиперболических функций, поскольку они выражаются через экспоненты [2].

Например:

$$\begin{aligned} Z(\text{Sin}(\omega nT)) &= Z\left(\frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j}\right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{1 - z^{-1}e^{j\omega T}} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-j\omega T}} \right) = \frac{1 - z^{-1}e^{-j\omega T} - 1 + z^{-1}e^{j\omega T}}{2j(1 - z^{-1}e^{j\omega T})(1 - z^{-1}e^{-j\omega T})} = \\ &= \frac{z^{-1}(e^{-j\omega T} + e^{j\omega T})/(2j)}{1 - z^{-1}(e^{-j\omega T} + e^{j\omega T}) + z^{-2}e^{j\omega T}e^{-j\omega T}} = \frac{\sin(\omega T)z^{-1}}{z^{-2} - 2\cos(\omega T)z^{-1} + 1}. \end{aligned}$$

В теории САУ дискретную последовательность $x(nT)$ рассматривают как произведение непрерывного сигнала $x(t)$ на периодическую последовательность δ -функций:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (1.41)$$

Амплитудно-модулированный импульсный сигнал имеет вид:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = x(t)\delta_T(t). \quad (1.42)$$

Преобразование Лапласа этого сигнала

$$\begin{aligned} X^*(p) &= \int_0^{\infty} x^*(t)e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x(t)\delta(t - nT)e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-pnT}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Формула (1.43) называется *дискретным преобразованием Лапласа* [2] и после замены $z = e^{pT}$ переходит в формулу z -преобразования дискретных сигналов (1.25). Кроме этого, для анализа дискретных систем управления применяют z -преобразование со смещением. В этом случае в качестве ар-

гумента функций дискретной переменной рассматривается время

$$t = nT + \varepsilon T, \quad (1.44)$$

где ε – параметр смещения в диапазоне $[0,1]$. Такое представление времени позволяет рассматривать z -преобразование не только для дискретных, но и для непрерывных функций времени. Z -преобразование со смещением имеет вид

$$X(z, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT + \varepsilon T) z^{-n}. \quad (1.45)$$

Z -преобразование, записанное в форме (1.45), обычно называют *модифицированным* z -преобразованием, в отличие от обычного z -преобразования (1.25), которое является частным случаем при $\varepsilon=0$.

1.5. Рекурсивное и нерекурсивное представление сигналов

Любой заданный дискретный сигнал можно представить в виде суммы задержанных единичных импульсов:

$$x_N(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT). \quad (1.46)$$

Ограниченный по длительности N сигнал запишется в виде:

$$x_N(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \delta(nT - kT). \quad (1.47)$$

Используя свойство задержки (1.29), выполним z -преобразование (1.47):

$$X_N(z) = \delta \sum_{k=0}^{N-1} x(k) z^{-k}. \quad (1.48)$$

Представления дискретного сигнала в виде (1.47), (1.46) называются *нерекурсивным* представлением сигнала. Например, имеется последовательность $x(nT) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. В соответствии с (1.47) ее можно представить в виде $x(nT) = \delta_0 x_0 +$

$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_3$. Используя (1.48), получим: $X(z) = \delta(x_0 + z^{-1}x_1 + z^{-2}x_2 + z^{-3}x_3)$.

Выражению (1.48) соответствует схема генератора конечной дискретной последовательности (рис. 1.5), состоящая из элементов задержки и пропорциональных звеньев. На вход схемы подается единичный импульс δ . В начальный момент времени он умножается на коэффициент x_0 , на следующем шаге единичный импульс появляется на выходе первого элемента задержки и умножается на x_1 и т.д. В результате на выходе формируется дискретный сигнал $x(nT)$.

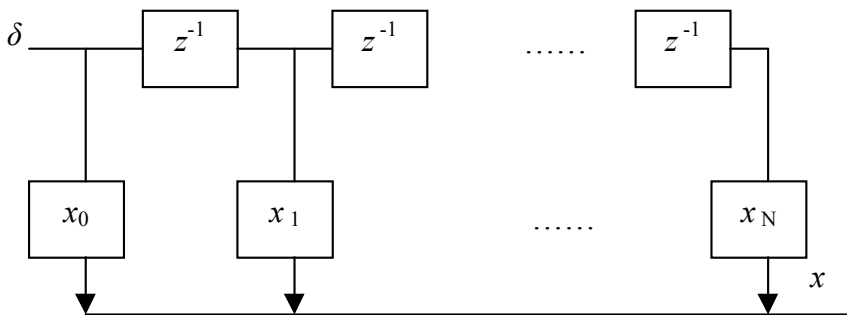


Рис. 1.5. Структурная схема генератора конечной дискретной последовательности

Для генерирования неограниченного во времени сигнала по схеме, показанной на рис. 1.5, требуется бесконечное число элементов и умножителей.

Под *рекурсивным* представлением сигнала принимаются формулы или алгоритмы, при которых для вычисления следующего значения сигнала используются предыдущие значения. Например, для формирования дискретной экспоненты e^{anT} можно воспользоваться формулой ее z -преобразования (1.40). Используя рекурсивный алгоритм, текущее значение сигнала получается умножением на коэффициент предыдущего значения. Структурная схема рекурсивного генератора

представлена на рис. 1.6. Единичный импульс δ задает начальное значение сигнала, на следующем шаге единичный сигнал формируется на выходе элемента задержки, умножается на ρ и передается на выход. Таким образом, формируется бесконечная дискретная последовательность $x(z) = \frac{1}{1 - \rho z^{-1}}$. Задавая

различные значения ρ , можно получать следующие сигналы:

- единичный импульс при $\rho=0$;
- единичная ступенька при $\rho=1$;
- экспоненциальный сигнал $\rho=e^{aT}$.

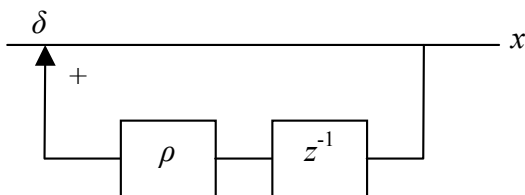


Рис. 1.6. Структурная схема рекурсивного генератора

2. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Под *дискретными системами* в общем случае понимаются *устройства и алгоритмы*, преобразующие входной дискретный сигнал $x(nT)$ (*воздействие*) в выходной сигнал $y(nT)$ (*отклик*) (рис. 2.1). Устройства цифровой обработки сигналов можно рассматривать как дискретные системы, если не учитывать шумы квантования.

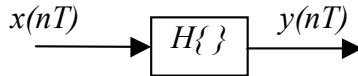


Рис. 2.1. Дискретная система

Дискретные системы задаются операторами, преобразующими воздействие $x(nT)$ в отклик $y(nT)$, что записывается в виде $y(nT) = H\{x(nT)\}$. Накладывая различные ограничения на оператор $H\{ \}$, можно выделить отдельные классы дискретных систем. Наиболее часто рассматриваются *инвариантные* и *линейные* системы.

Система H осуществляет преобразование: $H\{x(nT)\} = \{y(nT)\}$. Отметим, что выходная последовательность является функцией от всей входной последовательности, то есть каждый член входной последовательности зависит, вообще говоря, от всех членов входной последовательности [1].

Система H называется *инвариантной*, если

$$H\{x(nT - aT)\} = \{y(nT - aT)\} \quad (2.1)$$

для любого a .

Примеры.

1. Точечные системы: $H(x(nT)) = f(x(nT))$, где f произвольная функция, являются инвариантными.

2. $y(nT) = \sum_{k=1}^M x(nT - kT)$ для произвольного фиксированного M – инвариантная система.

3. $y(nT) = n \sum_{k=1}^M x(nT - kT)$ не будет инвариантной. Действительно, пусть $z(nT) = x(nT - aT)$. Согласно определению $y'(nT) = n \sum_{k=1}^M z(nT - kT) = n \sum_{k=1}^M x(nT - kT - aT) \neq y(nT - aT)$.

Линейными называются дискретные системы, удовлетворяющие принципу суперпозиции:

$$H(ax_1(nT) + bx_2(nT)) = aH(x_1(nT)) + bH(x_2(nT)). \quad (2.2)$$

Система линейна, если ее отклик на взвешенную сумму воздействий равен взвешенной сумме откликов на отдельные воздействия.

Далее будем рассматривать линейные инвариантные дискретные системы (ЛИС).

2.1. Передаточные функции дискретных систем

Передаточной функцией линейной дискретной системы $H(z)$ (рис. 2.2) называют отношение

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (2.3)$$

где $X(z)$ – z -изображение входной последовательности системы $x(nT)$, а $Y(z)$ – z -изображение выходной последовательности $y(nT)$ системы при нулевых начальных условиях.

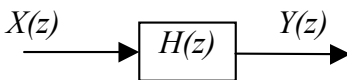


Рис. 2.2. Линейная дискретная система

В качестве примера рассмотрим передаточную функцию системы $H(z)$, на вход которой подается последовательность $x(nT) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ и на выходе формируется отклик $y(nT) =$

(y_0, y_1, y_2, y_3) . Поскольку z -преобразования входной и выходной последовательностей имеют вид

$X(z) = x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + x_3z^{-3}$; $Y(z) = y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3}$, дискретная передаточная функция системы определяется как

$$H(z) = \frac{y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + y_3z^{-3}}{x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + x_3z^{-3}}.$$

2.2. Структурные схемы дискретных систем

Структурной схемой дискретной системы называют графическое представление ее математической модели. Структурная схема может быть изображена в виде *графа*, т.е. диаграммы прохождения сигналов, состоящего из направленных узлов и ветвей [1].

Эквивалентными называют звенья, у которых при нулевых начальных условиях и одинаковых входных сигналах выходные сигналы также одинаковы.

Рассмотрим основные соединения.

1) *Последовательное соединение* – выходная последовательность предшествующего звена является входной для последующего (рис. 2.3). При этом эквивалентная передаточная функция $H_{\text{эк}}(z)$ равна произведению передаточных функций $H_1(z)$ и $H_2(z)$: $H_{\text{эк}}(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$,

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z)H_2(z)}{A(z)/H_1(z)} = H_1(z) \cdot H_2(z). \quad (2.4)$$

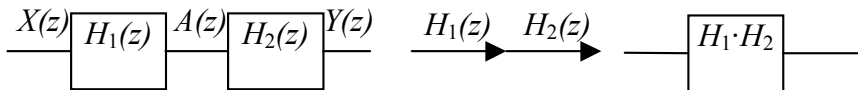


Рис. 2.3. Последовательное соединение

Поскольку операции умножения z -образов соответствует операция свертки дискретных последовательностей, отклик

системы $y(nT)$ при прохождении сигнала через две последовательно соединенных ЛИС можно найти как свертку функций отклика отдельных систем. Отсюда следует вывод о *коммутативности* последовательного соединения.

2) *Согласное (параллельное) соединение* – входная последовательность одинакова, а выходная равна сумме выходных последовательностей соединенных звеньев (рис. 2.4). При этом эквивалентная передаточная функция $H_{\text{эк}}(z)$ равна сумме передаточных функций $H_1(z)$ и $H_2(z)$:

$H_{\text{эк}}(z) = H_1(z) \pm H_2(z)$, поскольку

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A(z) \pm B(z)}{X(z)} = H_1(z) \pm H_2(z). \quad (2.5)$$

При параллельном соединении в качестве функции отклика $y(nT)$ получаем сумму функций, отвечающих отдельным слагаемым.

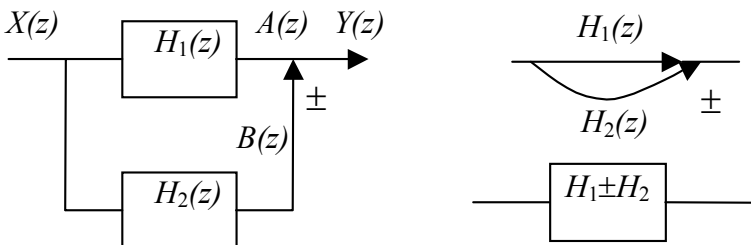


Рис. 2.4. Согласно соединение

3) *Соединение типа обратная связь* – выходная последовательность одного звена подается на вход другого, а выходная последовательность этого звена суммируется или вычитается из входной последовательности первого (рис. 2.5). При этом эквивалентная передаточная функция $H_{\text{эк}}(z)$ определяется по формуле:

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{A(z) \mp B(z)} = \frac{Y(z)}{Y(z)/H_1(z) \mp Y(z)H_2(z)} =$$

$$= \frac{1}{1/H_1(z) \mp H_2(z)}. \quad (2.6)$$

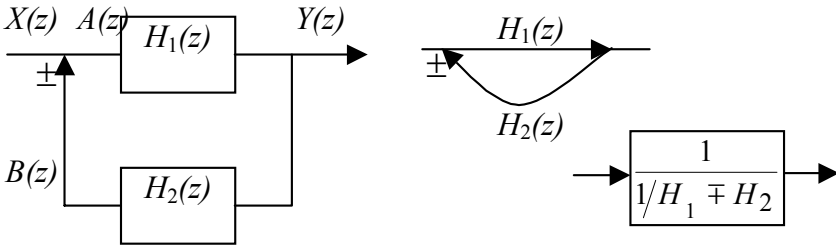


Рис. 2.5. Обратная связь

2.3. Временные характеристики дискретных фильтров

Важнейшей временной характеристикой линейной дискретной системы является *импульсная характеристика*, под которой понимают реакцию системы $h(nT)$ на единичный импульс $\delta(nT)$ при нулевых начальных условиях [1].

Переходной характеристикой $g(nT)$ называется реакция системы на единичный скачок $u(nT)$ при нулевых начальных условиях.

При помощи дискретной свертки можно рассчитать реакцию $y(nT)$ дискретной системы на единичный импульс $\delta(nT)$. Соответственно, входная последовательность системы может быть представлена в виде:

$$x(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(nT - kT). \quad (2.7)$$

Так как реакция дискретного фильтра на единичный импульс $\delta(nT)$ есть импульсная характеристика $h(nT)$, вследствие стационарности системы $h(nT-kT)$ будет реакцией системы на последовательность $\delta(nT-kT)$, и из свойств линейности системы следует, что реакция $y(nT)$ на последовательность $x(nT)$:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(nT - kT)h(kT). \quad (2.8)$$

В формуле (2.8) предполагается, что $h(nT)=0$, $x(nT)=0$ при $n<0$. Таким образом

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^n x(nT - kT)h(kT), \quad (2.9)$$

поскольку $h(nT)$, $x(nT)$ конечные и ограниченные последовательности, которые отличны от нуля только в N точках, $n=0, 1, 2 \dots N - 1$, то

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(nT - kT)h(kT). \quad (2.10)$$

Таким образом, формула свертки (2.10) определяет выходную последовательность как сумму откликов системы на входную последовательность импульсных воздействий и позволяет вычислить выходную последовательность $y(nT)$ при нулевых начальных условиях и при произвольной входной последовательности. Следует отметить, что операция свертки в области дискретных последовательностей соответствует операции умножения в области z -образов $Y(z) = X(z) \cdot H(z)$.

2.4. Связь передаточной функции с импульсной характеристикой

Из определения передаточной функции системы (2.3) следует, что если на вход системы с передаточной функцией $H(z)$ подать единичный импульс $x(nT)=\delta(nT)$, то на выходе системы формируется последовательность $y(nT)=h(nT)$, т.е. импульсная характеристика. Поскольку в этом случае $X(z)=1$, то

$$Y(z)=Z(y(nT))=Z(h(nT))=H(z). \quad (2.11)$$

Таким образом, Z -образ импульсной характеристики совпадает с передаточной функцией системы.

Если записать $H(z)$ в общем случае в виде

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad \text{то очевидно, что коэффициенты } b_k \text{ совпадают}$$

с k -ми выборками импульсной характеристики $h(nT)$ и, следовательно

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} . \quad (2.12)$$

Таким образом, последовательность $h(nT)$ можно вычислить из расчета передаточной функции. Из уравнения $H(z) = Z(h(nT))$ следует соотношение:

$$h(nT) = Z^{-1}(H(z)) . \quad (2.13)$$

2.5. Фильтры с конечной и бесконечной импульсными характеристиками

Различают две разновидности фильтров [1]:

- 1) Фильтры с *конечной импульсной характеристикой* (КИХ);
- 2) Фильтры с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ).

Фильтром с конечной импульсной характеристикой – *КИХ-фильтром* называют фильтр, у которого импульсная характеристика представляет собой конечный дискретный N -точечный сигнал, т.е. может принимать отличные от нуля значения при $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

В соответствии с выражением (2.12) передаточная функция КИХ-фильтра имеет вид:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k} . \quad (2.14)$$

В соответствии с этой формулой можно привести структурную схему КИХ-фильтра (рис. 2.6). Такая реализация КИХ системы называется *нерекурсивной*. При подаче на вход единичного импульса $\delta(nT)$ структурная схема аналогична генератору конечной дискретной последовательности (рис. 2.5) и генерирует заданную импульсную характеристику $h(nT)$.

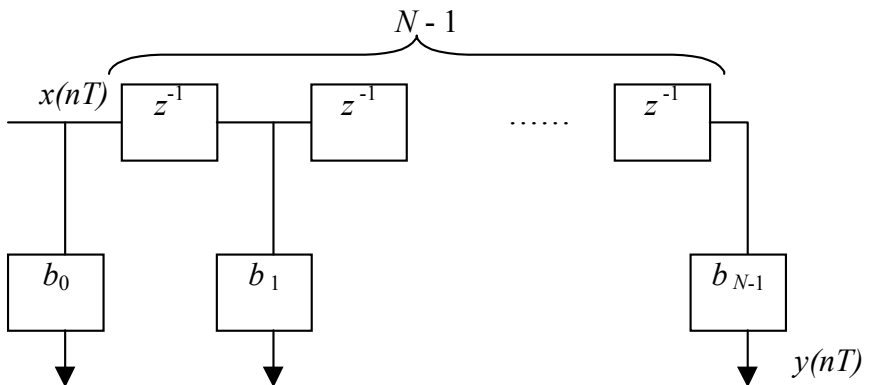


Рис. 2.6. Структурная схема нерекурсивного фильтра

Очевидно, что нерекурсивный фильтр всегда является КИХ-фильтром, т.е. имеет конечную импульсную характеристику.

Фильтром с бесконечной импульсной характеристикой – *БИХ-фильтром* называют фильтр, у которого импульсная характеристика может принимать отличные от нуля значения на бесконечном множестве $n=0, 1, 2 \dots \infty$.

Такие системы в нерекурсивной форме не могут быть реализованы, поскольку для этого требуется бесконечное число элементов. Реализация БИХ-систем легко осуществляется с конечным числом элементов, если использовать рекурсию. Для реализации БИХ-системы нужно поставить нерекурсивную КИХ-систему в цепь обратной связи (рис. 2.7). В соответствии с (2.6), найдем дискретную передаточную функцию рекурсивного фильтра

$$H(z) = \frac{1}{1/H_1(z) \mp H_2(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}}. \quad (2.15)$$

Последовательное соединение нерекурсивного (рис. 2.6) и рекурсивного (рис. 2.7) фильтров называется *прямой формой*

рекурсивного фильтра, передаточная функция определяется произведением передаточных функций (2.14) и (2.15):

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}}. \quad (2.16)$$

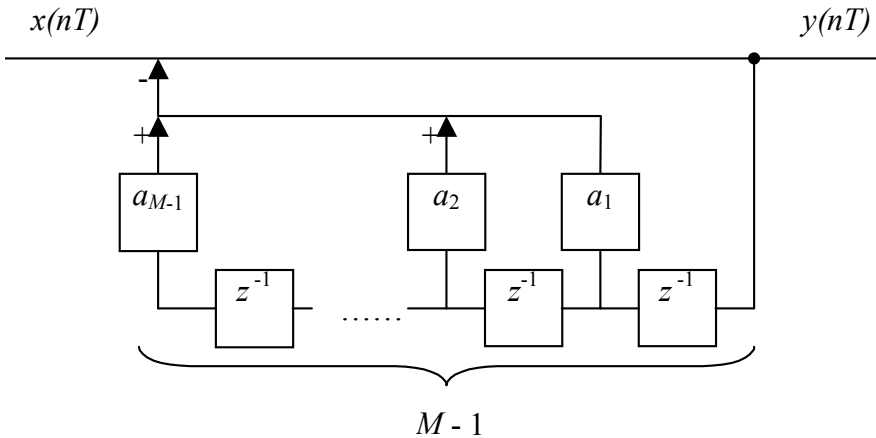


Рис. 2.7. Структурная схема рекурсивного фильтра

Канонической называют структурную схему фильтра с минимальным числом элементов задержки при условии реализации передаточной функции (2.16). Структурная схема (рис. 2.8) получается последовательным соединением нерекурсивного (рис. 2.6) и рекурсивного (рис. 2.7) фильтров и объединением элементов задержки.

Рекурсивный фильтр, как правило, имеет бесконечную импульсную характеристику и является БИХ-фильтром, но могут быть исключения.

Например, рассмотрим рекурсивный фильтр с передаточной функцией $H(z) = \frac{2 - 2z^{-4}}{1 - z^{-1}}$. Для определения импульсной характеристики $h(nT)$, в соответствии с (2.13), надо выпол-

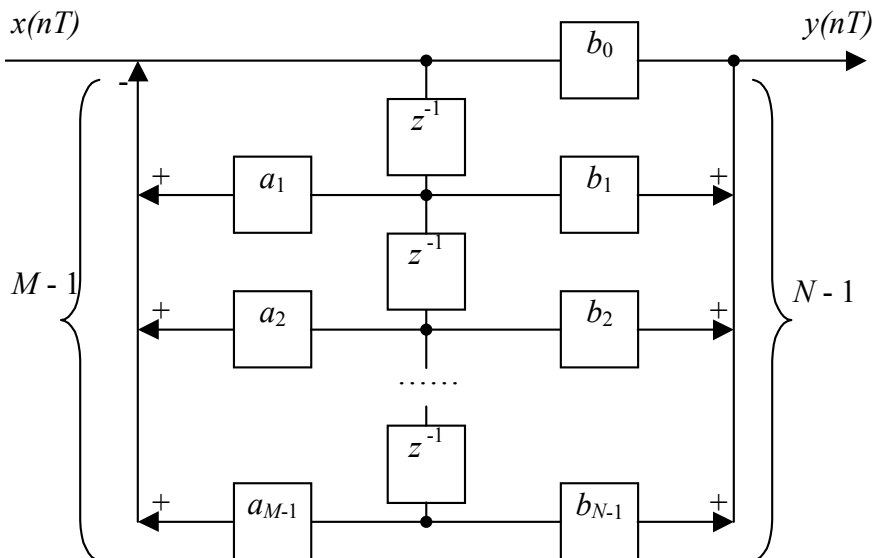


Рис. 2.8. Структурная схема КИХ-фильтра

нить $h(nT) = h_1(nT) + h_2(nT) = 2 \cdot 1^n - 2^{n-4}$ – обратное z -преобразование. Поскольку последовательности $h_1(nT)$ и $h_2(nT)$ отличаются задержкой на $4T$, их разность можно записать в виде конечной последовательности $h(nT) = (2, 2, 2, 2)$. Таким образом, $H(z)$ – КИХ-фильтр.

Поскольку основные особенности проектирования и применения фильтров связаны с видом импульсной характеристики, а не с наличием рекурсии при реализации, наиболее часто используют термины КИХ- или БИХ-фильтр [1].

2.6. Разностные уравнения (алгоритмы дискретных фильтров)

Разностные уравнения широко используются для описания стационарных дискретных систем, с их помощью можно записать связь между входной $x(nT)$ и выходной $y(nT)$ последовательностями системы в следующем виде [2]:

$$a_0y(nT) + a_1y((n-1)T) + a_2y((n-2)T) + \dots + a_My((n-M)T) = b_0x(nT) + b_1x((n-1)T) + b_2x((n-2)T) + \dots + b_Nx((n-N)T). \quad (2.17)$$

Если коэффициенты уравнения (2.17) a_0, a_1, \dots, a_M и b_0, b_1, \dots, b_M постоянны, то система является линейной и стационарной. Если коэффициенты являются функциями x и y , уравнение (2.17) нелинейно. Система является нестационарной, если коэффициенты уравнения (2.17) являются функциями дискретной переменной n .

Удобным аппаратом для решения разностных уравнений является z -преобразование. Применяя z -преобразование к уравнению (2.17), учитывая свойство линейности и сдвига, получим формулу (2.18):

$$a_0Y(z) + a_1Y(z)z^{-1} + \dots + a_MY(z)z^{-M} = b_0X(z) + b_1X(z)z^{-1} + \dots + b_NX(z)z^{-N} \\ Y(z)(a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}) = X(z)(b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}). \quad (2.18)$$

Таким образом, исходя из (2.3), получим передаточную функцию системы

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M}} = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \bigg/ \sum_{m=0}^M a_m z^{-m}. \quad (2.19)$$

Следовательно, коэффициенты разностного уравнения являются коэффициентами передаточной функции, а передаточная функция определяется применением z -преобразования к разностному уравнению.

Если коэффициент $a_0 = 1$, то формула (2.19) переходит в формулу передаточной функции рекурсивного фильтра (2.16).

Из выражения (2.17) следует, что для определения значения выходной переменной y на текущем шаге расчета n необходимо знать M предшествующих значений y , величину задания x и ее N предшествующих значений. Число M определяет порядок системы. Таким образом, расчет выходной последовательности $y(nT)$ системы с дискретной передаточной функцией (2.16), можно вести по рекурсивной формуле:

$$y(nT) = b_0x(nT) + b_1x((n-1)T) + b_2x((n-2)T) + \dots + b_Nx((n-N)T) - a_1y((n-1)T) - a_2y((n-2)T) - \dots - a_My((n-M)T). \quad (2.20)$$

Уравнение (2.20) является основой для построения алгоритмов дискретных фильтров [1].

2.7. Нули и полюса передаточной функции

При анализе дискретных систем важное значение имеет определение положения *полюсов* и *нулей* передаточной функции в z -плоскости. *Полюс* – это корень полинома в знаменателе, а *ноль* – корень полинома в числителе передаточной функции.

Если у полинома порядка N вещественные коэффициенты, то он имеет N корней, среди которых могут быть вещественные и комплексно-сопряженные. Для определения нулей и полюсов передаточную функцию целесообразно преобразовать к виду без отрицательных степеней z .

2.8. Устойчивость и реализуемость дискретных фильтров

Дискретная система называется *устойчивой* [4], если при произвольных начальных условиях отклик системы $y(nT)$ на любое ограниченное воздействие $x(nT)$ также ограничен, т.е. $|x(nT)| \leq R_x < \infty$, то $|y(nT)| \leq R_y < \infty$, для всех n , где R_x, R_y – постоянные не зависящие от n .

Система называется *устойчивой*, если она переводит любую ограниченную последовательность в ограниченную.

Критерием устойчивости системы является абсолютная сходимость ряда отсчетов импульсной характеристики:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| < \infty. \quad (2.21)$$

Для доказательства критерия устойчивости (2.21) найдем отклик системы $y(nT)$ на произвольное ограниченное воздействие $x(nT)$ по формуле (2.8)

$$|y(nT)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x(nT - kT)| |h(kT)| \leq R_x \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)|. \quad (2.22)$$

Непосредственное применение критерия устойчивости (2.21) затруднительно. Поэтому рассмотрим критерий устойчивости, основанный на связи передаточной функции и импульсной характеристики (2.12), откуда получим:

$$|H(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) z^{-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| |z^{-k}|. \quad (2.23)$$

Допустим, что $|z^{-1}| \leq 1$, тогда $|z^{-k}| \leq 1$ и, следовательно:

$$|H(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)|. \quad (2.24)$$

Для устойчивой системы должно выполняться условие (2.21), поэтому передаточная функция $H(z)$ должна быть конечна во всех точках z -плоскости, где $|z| \geq 1$. Очевидно, что в полюсе (при $z=z_k$) $H(z)=\infty$. Отсюда следует, что передаточная функция $H(z)$ не должна иметь полюсов на единичной окружности и вне ее, т.е. должно выполняться условие:

$$|z_k| < 1. \quad (2.25)$$

Таким образом, дискретная система устойчива, если все полюса передаточной функции находятся внутри единичного круга z -области (рис. 2.9).

Следует отметить, что КИХ-фильтр всегда устойчив, поскольку его импульсная характеристика имеет конечную длину (выражение (2.21)).

Поскольку устойчивость КИХ-фильтра определяется многочленом знаменателя, числитель не влияет на устойчивость системы.

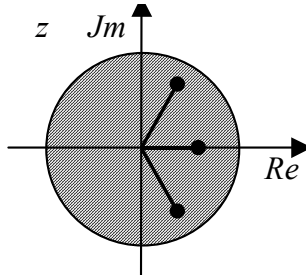


Рис. 2.9. Расположение полюсов устойчивой дискретной системы

Цифровые фильтры являются частным случаем линейных инвариантных систем. Существенное ограничение связано с физической реализуемостью системы.

Система называется *физически реализуемой*, если сигнал на выходе в момент времени t зависит от входных сигналов в моменты времени $\leq t$. Линейная дискретная система физически реализуема, если ее отклик $y(nT)$ зависит лишь от воздействия $x(nT)$ и не опережает его.

Рассмотрим наиболее распространенные структурные схемы, разностные уравнения и устойчивость простых рекурсивных звеньев. К таким звеньям относят обобщенное звено первого порядка (рис. 2.10). Разностное уравнение рекурсивного звена первого порядка имеет вид

$$y(nT) = b_0x(nT) + b_1x((n-1)T) - a_1y((n-1)T). \quad (2.26)$$

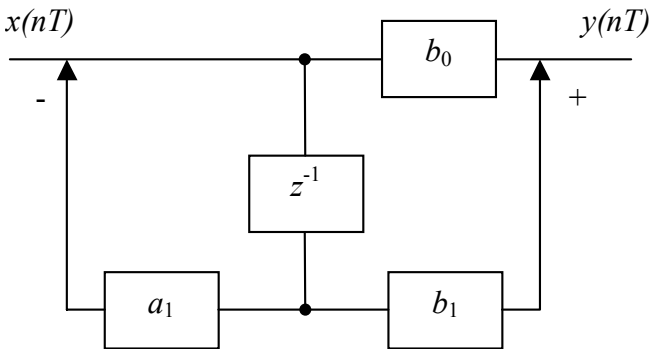


Рис. 2.10. Структурная схема звена первого порядка

Применив z -преобразование к разностному уравнению, получим:

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z)z^{-1} - a_1 Y(z)z^{-1}. \quad (2.27)$$

Таким образом, передаточная функция этого звена имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}} + \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \quad (2.28)$$

Импульсной характеристикой звена называют реакцию этого звена на единичный импульс δ , при нулевых начальных условиях. Для получения импульсной характеристики найдем обратное z -преобразование передаточной функции (2.28)

$$\begin{aligned} h(nT) &= h_1(nT) + h_2(nT), \\ h_1(nT) &= b_0 (-a_1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ h_2(nT) &= b_1 (-a_1)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.29)$$

Проанализируем устойчивость звена первого порядка. Из (2.29) видим, что ряд импульсной характеристики сходится, а значит, звено устойчиво тогда и только тогда, когда $|a| < 1$.

Нерекурсивное звено второго порядка имеет разностное уравнение вида:

$$y(nT) = b_0 x(nT) + b_1 x((n-1)T) + b_2 x((n-2)T). \quad (2.30)$$

Применив z -преобразование к разностному уравнению, получим передаточную функцию:

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}. \quad (2.31)$$

Импульсная характеристика этого звена содержит три отсчета:

$$h(nT) = (b_0, b_1, b_2). \quad (2.32)$$

Рекурсивное звено второго порядка приведено на рис. 2.11, а. Разностное уравнение рекурсивного звена второго порядка имеет вид

$$y(nT) = b_0x(nT) + b_1x((n-1)T) + b_2x((n-2)T) - a_1y((n-1)T) - a_2y((n-2)T) \quad (2.33)$$

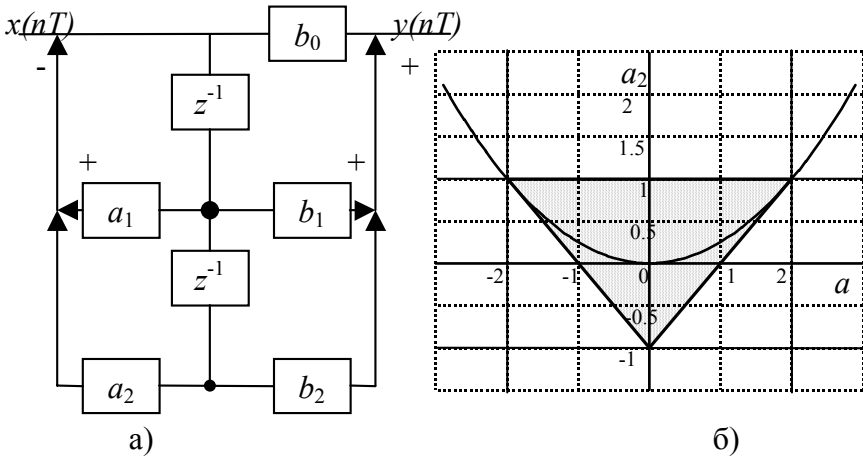


Рис. 2.11. Структурная схема звена второго порядка

Применив z -преобразование к разностному уравнению (2.33), получим:

$$Y(z) = b_0X(z) + b_1X(z)z^{-1} + b_2X(z)z^{-2} - a_1Y(z)z^{-1} - a_2Y(z)z^{-2} \quad (2.34)$$

Таким образом, передаточная функция звена имеет вид

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (2.35)$$

Найдя корни многочлена в знаменателе e_1, e_2 , запишем передаточную функцию в виде

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{(1 - e_1z^{-1})(1 - e_2z^{-1})} \quad (2.36)$$

Это означает, что звено второго порядка есть последовательное соединение двух звеньев первого порядка. Корни знаменателя e_1, e_2 могут быть определены по формуле

$e = -a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2}$, таким образом, они могут быть вещественными и комплексно-сопряженными. В случае вещественных корней $a_1^2/4 - a_2 \geq 0$, эта область расположена ниже параболы (рис. 2.11, б). Корни знаменателя связаны с коэффициентами знаменателя соотношением:

$$\begin{aligned} a_1 &= -e_1 - e_2, \\ a_2 &= e_1 e_2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Поскольку для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы корни знаменателя e_1, e_2 по модулю были меньше единицы, можно записать следующие условия: $|a_1| < 2$, $|a_2| < 1$, и из совместного решения (2.37) получим $a_2 = -a_1 e_1 - e_1^2$, откуда следует условие $|a_1| < a_2 + 1$. Решением этих неравенств является треугольник устойчивости (рис. 2.11, б), ограниченный условиями:

$$a_2 < 1; \quad a_1 < a_2 + 1; \quad -a_1 < a_2 + 1. \quad (2.38)$$

Другими словами, если точка с координатами (a_1, a_2) попадает внутрь треугольника, соответствующее звено будет устойчивым.

Звенья высших порядков. Предположим, что передаточная функция звена имеет вид

$$H(z) = \frac{p(z^{-1})}{q(z^{-1})}, \quad (2.39)$$

где в числителе и знаменателе стоят вещественные многочлены, причем $q(z)$ имеет степень выше двух. В этом случае имеет место разложение $q(z) = q_1(z) \cdots q_s(z)$ на неприводимые многочлены первой и второй степеней с вещественными коэффициентами, а сам фильтр можно заменить последовательным соединением s звеньев первого порядка. Если $q(z) = q_1(z)q_2(z)$ и сомножители взаимно простые, то для не-

которых многочленов $1 = p_2(z)q_1(z) + p_1(z)q_2(z)$. Отсюда следует, что $\frac{p_1(z)}{q_1(z)} + \frac{p_2(z)}{q_2(z)} = \frac{1}{q(z)}$. Другими словами, фильтр можно представить как параллельное соединение двух фильтров. С помощью базисных звеньев второго и первого порядка можно реализовать фильтр любого порядка.

2.9. Частотные характеристики линейных дискретных фильтров

Пусть $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ – Фурье-преобразование входной и выходной последовательности $x(nT)$ и $y(nT)$ дискретного фильтра, т.е.

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}, \quad (2.40)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)e^{-j\omega nT}. \quad (2.41)$$

Суммирование проводится от $n=0$, поскольку предполагается, что $x(nT)=0$ и $y(nT)=0$ при $n<0$). Тогда частотной характеристикой системы называют отношение спектра выходной последовательности к спектру входной последовательности:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \quad (2.42)$$

Следовательно, частотная передаточная функция $H(\omega)$ совпадает с передаточной функцией на единичной окружности z -плоскости при подстановке $z = e^{j\omega T}$ [4]:

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}}. \quad (2.43)$$

Частотная характеристика (ЧХ) $H(\omega)$ представляет собой коэффициент передачи системы для каждого значения частоты ω при заданном периоде дискретизации T . В общем случае $H(\omega)$ – комплексная функция, которая может быть записана в виде:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jJ(\omega). \quad (2.44)$$

Модуль частотной характеристики называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)*:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + J(\omega)^2}. \quad (2.45)$$

Аргумент частотной характеристики называется *фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)*:

$$\varphi(\omega) = \arg(H(\omega)) = \text{arctg } J(\omega)/R(\omega). \quad (2.46)$$

Реальная часть частотной характеристики называется *вещественной частотной характеристикой (ВЧХ)*:

$$R(\omega) = \text{Re}(H(\omega)) = A(\omega) \cos(\varphi(\omega)). \quad (2.47)$$

Мнимая часть частотной характеристики называется *мнимой частотной характеристикой*:

$$J(\omega) = \text{Im}(H(\omega)) = A(\omega) \sin(\varphi(\omega)). \quad (2.48)$$

Групповое время замедления (ГВЗ) определяется по формуле:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (2.49)$$

Частотные характеристики КИХ-фильтра определяются из выражений передаточной функции (2.14) и частотной характеристики (2.43):

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-jk\omega T}. \quad (2.50)$$

Аналогично из выражений (2.16) и (2.43) получим частотную характеристику БИХ-фильтра:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-k\omega T}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m e^{-m\omega T}}. \quad (2.51)$$

Из определения частотных характеристик следует ряд важных свойств. Частотная характеристика является спектром

импульсной характеристики. Это свойство следует из анализа выражений (2.12) и (2.43):

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)e^{-jk\omega T}. \quad (2.52)$$

Таким образом, свойства частотных характеристик во многом совпадают со свойствами спектров дискретного сигнала (п. 2.1):

1) Частотная характеристика дискретных систем $H(\omega)$ является периодической функцией по частоте ω с периодом, равным частоте дискретизации: $\omega_0 = 2\pi/T$, поскольку $e^{jk\omega T} = e^{j(\omega+\omega_0)kT}$.

2) АЧХ и ФЧХ также являются периодическими функциями с периодом $\omega_0 = 2\pi/T$.

3) Поскольку импульсная характеристика $h(kT)$ является затухающей непериодической функцией, частотные характеристики являются непрерывными функциями частоты.

4) Для фильтров с вещественными коэффициентами АЧХ $A(\omega)$ и ГВЗ $\tau(\omega)$ – четные функции частоты, а ФЧХ $\varphi(\omega)$ – нечетная функция частоты.

5) Частотные характеристики передаточной функции системы с вещественными коэффициентами достаточно задавать в основной полосе частот $\omega[0.. \pi/T]$.

Для того чтобы частотные характеристики различных систем было легче сравнивать друг с другом, частоту ω нормируют. Поскольку все частотные характеристики зависят от произведения ωT , вместо ωT вводят одну переменную w . Нормированную частоту w выбирают таким образом, чтобы период для всех нормированных частотных характеристик был равен единице $w_0=1$:

$$w = \omega T / 2\pi. \quad (2.53)$$

При этом требования к частотным характеристикам задают в полосе частот $w[0..0,5]$. На рис. 2.12 показаны единич-

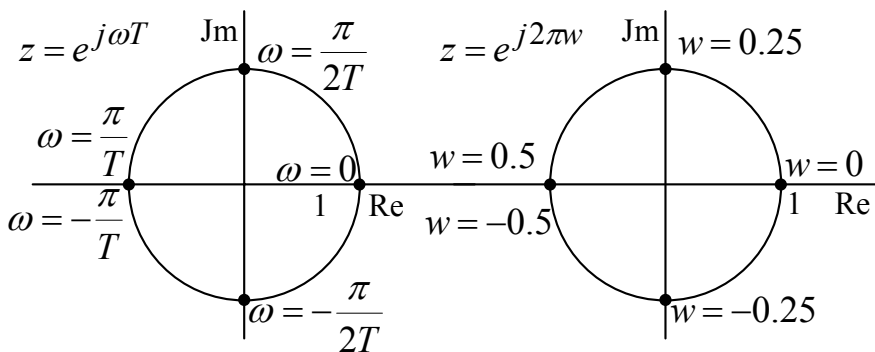


Рис. 2.12. Связь точек единичной окружности и частот ω и w

ная окружность z -плоскости и соответствие ее точек определенным частотам ω и w .

Кроме того, для дискретных фильтров вводят *нормировку по амплитуде*. Дискретный фильтр называют *нормированным*, если максимальное значение АЧХ равно 1.

Нормировка фильтра по амплитуде достигается путем умножения коэффициентов числителя передаточной функции на нормирующий множитель $q_n = 1/A_{max}$, где A_{max} – максимальное значение АЧХ на интервале $w[0..0,5]$.

В качестве примера рассмотрим частотные характеристики КИХ-фильтра с передаточной функцией $H(z) = 2 + 2z^{-1} + z^{-2}$. В соответствии с (2.50) получим:

$$H(\omega) = 2 + 2e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} = 2 + 2\cos(\omega T) - j2\sin(\omega T) + \cos(2\omega T) - j\sin(2\omega T). \quad (2.54)$$

Таким образом, АЧХ и ФЧХ имеют вид:

$$A(\omega) = \sqrt{(2 + 2\cos(\omega T) + \cos(2\omega T))^2 + (2\sin(\omega T) + \sin(2\omega T))^2};$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\sin(\omega T) + \sin(2\omega T)}{2 + 2\cos(\omega T) + \cos(2\omega T)}. \quad (2.55)$$

АЧХ и ФЧХ, нормированные по частоте, приведены на рис. 2.13. Максимальное значение АЧХ имеет место на частоте $w = 0$, подставив в (2.54), получим выражение

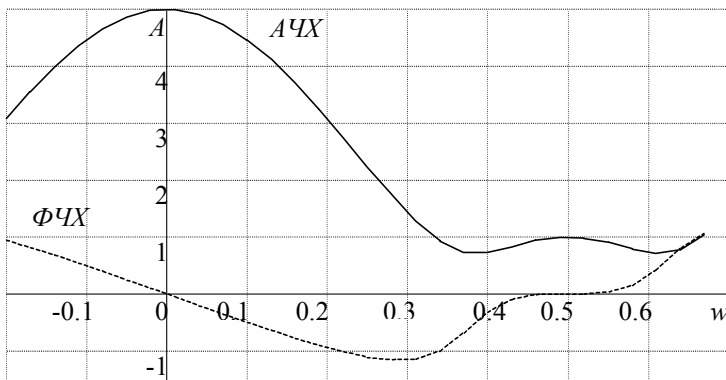


Рис. 2.13. АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра

$A_{\max} = A(0) = 2 + 2e^{j0} + e^{j0} = 5$. Проведем нормировку фильтра путем умножения коэффициентов передаточной функции на нормирующий множитель $q_n = 1/A_{\max} = 1/5$, получим $H(z) = 0.4 + 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}$.

2.10. Метод отображения дифференциалов

Метод отображения дифференциалов позволяет получать дискретные передаточные функции систем по заданным передаточным функциям аналоговых систем в виде:

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_Np^N}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_Mp^M}, \quad N < M. \quad (2.56)$$

Каждый оператор дифференцирования p в передаточной функции (2.56) заменяется дискретным эквивалентом [1]:

$$p \rightarrow \frac{d}{dt} \approx \frac{\Delta}{T} \rightarrow \frac{H_{\Delta}(z)}{T}, \quad (2.57)$$

где Δ – разностный оператор, выражающий приращение дискретного сигнала $x(nT)$, соответствующего непрерывному сигналу $x_n(t)$ на входе дифференцирующего звена, за один шаг

дискретизации T ; $H_{\Delta}(z)$ – передаточная функция разностного оператора Δ .

Непрерывное дифференцирующее звено может быть аппроксимировано дискретным дифференцирующим звеном несколькими способами. Существует множество z -форм, отличающихся по точности и сложности.

При выводе z -форм удобно решать задачу дискретной аппроксимации не дифференцирующего оператора p , а интегрирующего звена $1/p$ и его дискретного эквивалента $\frac{T}{H_{\Delta}(z)}$ (рис. 2.14), что позволяет свести задачу к одному из методов численного интегрирования и нахождению соответствующей передаточной функции дискретного интегратора.

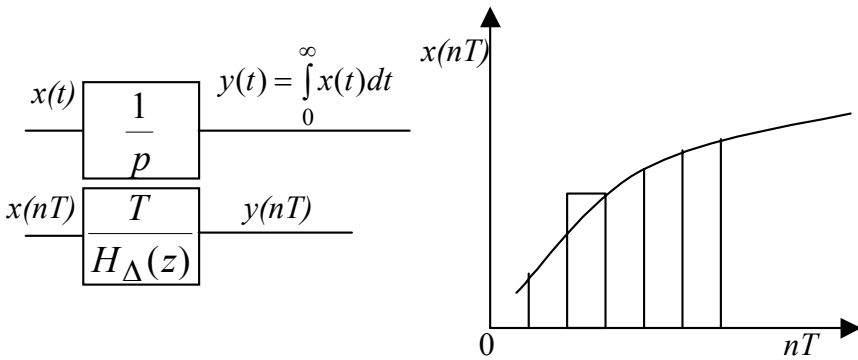


Рис. 2.14. Дискретная аппроксимация интегрирующего звена

Рассмотрим интегрирование сигнала по *методу прямоугольников*. Приращение сигнала на выходе интегратора за шаг дискретизации равно произведению входного отсчета на шаг дискретизации, таким образом, разностное уравнение имеет вид:

$$y(nT) = y((n-1)T) + x(nT)T. \quad (2.58)$$

Найдем z -преобразование разностного уравнения

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + X(z)T. \quad (2.59)$$

Таким образом, передаточная функция эквивалентного интегрирующего звена имеет вид:

$$H(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}; H_{\Delta}(z) = 1 - z^{-1}. \quad (2.60)$$

Это означает, что для аппроксимации первого порядка передаточной функции аналоговой системы (2.56) необходимо выполнить подстановку

$$p \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (2.61)$$

После этого оценивают искажения частотных характеристик дискретной системы по сравнению с исходной непрерывной, которые возникают из-за наложения частот при дискретизации.

Используя более точные методы численного интегрирования, можно получить z -формы различных порядков. По аналогии, используя *метод трапеций*, найдем более точную z -форму. Разностное уравнение по методу трапеций имеет вид:

$$y(nT) = y((n-1)T) + T \frac{x(nT) + x((n-1)T)}{2}. \quad (2.62)$$

Найдем z -преобразование разностного уравнения

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + \frac{T}{2}(X(z) - X(z)z^{-1}). \quad (2.63)$$

Таким образом, z -форма второго порядка имеет вид:

$$H^2(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}; H_{\Delta}(z) = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; p \rightarrow \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (2.64)$$

2.11. Метод билинейного преобразования

Формула (2.64) называется билинейным преобразованием. Рассмотрим трансформацию частотных характеристик при билинейном преобразовании [1]:

$$\begin{aligned}
 p = j\Omega &= \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2})} = \\
 &= j \frac{2 \sin(\omega T/2)}{T \cos(\omega T/2)} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

Таким образом, комплексная частотная характеристика аналогового звена совпадает с комплексной частотной характеристикой дискретного звена, если ось частот подвергнуть преобразованию тангенса:

$$W(j\Omega) = W\left(j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}\right) = H(e^{j\omega T}). \quad (2.66)$$

В области нижних частот частотные характеристики аналогового и дискретного звеньев совпадают. С ростом частоты нелинейность увеличивается, при этом бесконечно большой частоте $\Omega = \infty$ соответствует частота $\omega = \pi/T$ дискретного фильтра. Таким образом, ось частот $\Omega[0.. \infty]$ однозначно сжимается в ось частот $\omega[0.. \pi/T]$. Поскольку функция тангенса периодическая, частотные характеристики билинейного преобразования являются периодическими функциями частоты с периодом $\omega_{\partial} = 2\pi/T$.

В качестве примера рассмотрим частотные характеристики колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{T_3^2 p^2 + T_3 \rho p + 1}. \quad (2.64)$$

После билинейного преобразования (2.64) получим дискретную передаточную функцию (2.67):

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1}{T_3^2 p^2 + T_3 \rho p + 1} \Bigg|_{p = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \\
 &= \frac{1}{\frac{4T_3^2}{T^2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + \frac{2T_3 \rho (1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} p + 1} = \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\frac{4T_3^2}{T^2}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) + \frac{2T_3\rho}{T}(1 - z^{-2}) + 1 + 2z^{-1} + z^{-2}} = \\
&= \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(\frac{4T_3^2}{T^2} + \frac{2T_3\rho}{T} + 1\right) + \left(-\frac{8T_3^2}{T^2} + 2\right)z^{-1} + \left(\frac{4T_3^2}{T^2} - \frac{2T_3\rho}{T} + 1\right)z^{-2}}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим частотные характеристики звена с параметрами $T=0.1$, $T_3=0.01$, $\rho=0.2$. Передаточные функции непрерывного и дискретного звеньев имеют вид:

$$W(p) = \frac{1}{0.0001p^2 + 0.002p + 1}; \quad H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1.08 + 1.92z^{-1} + z^{-2}}.$$

Частотные передаточные функции имеют вид:

$$\begin{aligned}
W(\Omega) &= \frac{1}{-0.0001\Omega^2 + j0.002\Omega + 1}; \\
H(\omega) &= \frac{1 + 2e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T}}{1.08 + 1.92e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T}}.
\end{aligned}$$

АЧХ и ФЧХ аналогового и дискретного звеньев в нормированной частоте приведены на рис. 2.15. Характеристики показывают эффекты нелинейности соотношения между частотными шкалами непрерывного и дискретного звеньев. В приведенном примере период дискретизации T в десять раз больше постоянной времени звена T_3 , однако, как правило, период дискретизации T выбирают меньше постоянных времени в системе и в этом случае преобразование осуществляется в области нижних частот практически по линейному закону.

Обратное билинейное преобразование позволяет анализировать дискретные передаточные функции по непрерывным передаточным функциям. Для этого выразим из уравнения (2.64) z через p .

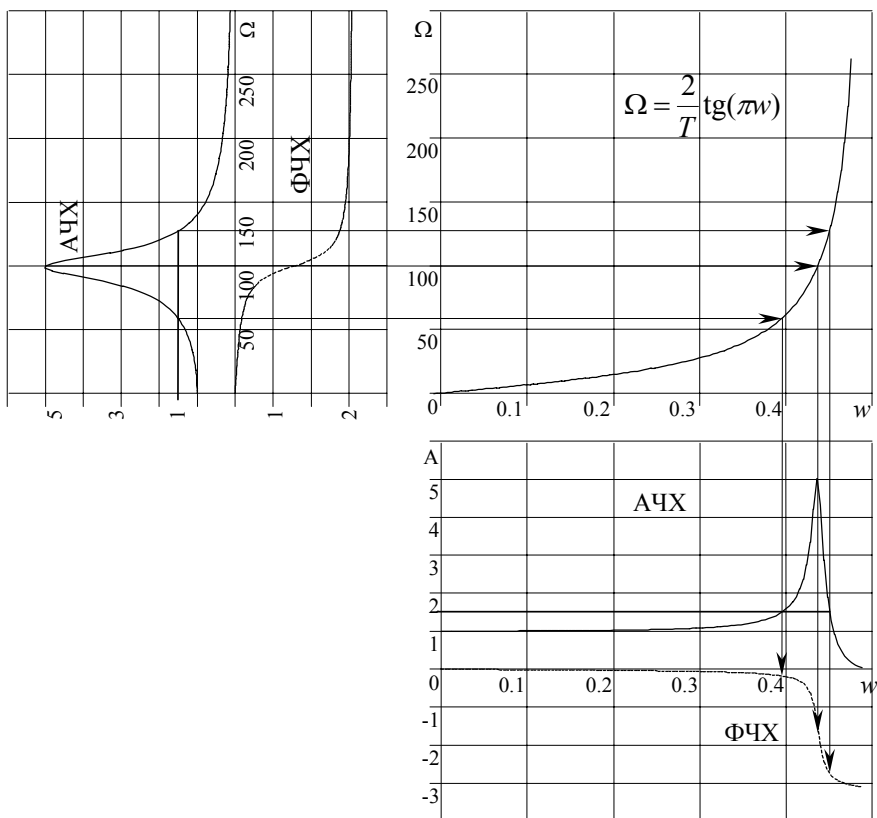


Рис. 2.15. Трансформация частот при билинейном преобразовании

$$p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; \quad \frac{Tp}{2} + \frac{Tpz^{-1}}{2} = 1 - z^{-1}; \quad z^{-1} \left(\frac{Tp}{2} + 1 \right) = 1 - \frac{Tp}{2};$$

$$z = \frac{1 + Tp/2}{1 - Tp/2}. \quad (2.68)$$

При билинейном преобразовании (2.64) каждой точке комплексной p -плоскости соответствует определенная точка z -плоскости. Мнимая ось p -плоскости ($p=j\Omega$ при изменении Ω от $-\infty$ до $+\infty$) отображается в единичную окружность z -плоскости:

$$z = \frac{1 + Tp/2}{1 - Tp/2} = \frac{1 + jT\Omega/2}{1 - jT\Omega/2} = \sqrt{\frac{1 + (T\Omega/2)^2}{1 + (T\Omega/2)^2}} e^{j(\arctan \frac{T\Omega}{2} - \arctan(-\frac{T\Omega}{2}))} = e^{j2 \arctan \frac{T\Omega}{2}} = e^{j\omega T}. \quad (2.69)$$

Левая половина p -плоскости отображается в область внутри единичного круга z -плоскости (рис. 2.16), а правая половина p -плоскости отображается в область за единичной окружностью z -плоскости. Поскольку все полюсы устойчивого аналогового звена расположены в левой половине p -плоскости, а полюсы устойчивого дискретного звена расположены внутри единичного круга z -плоскости, при билинейном преобразовании физически реализуемые устойчивые системы преобразуются в физически реализуемые устойчивые дискретные звенья.

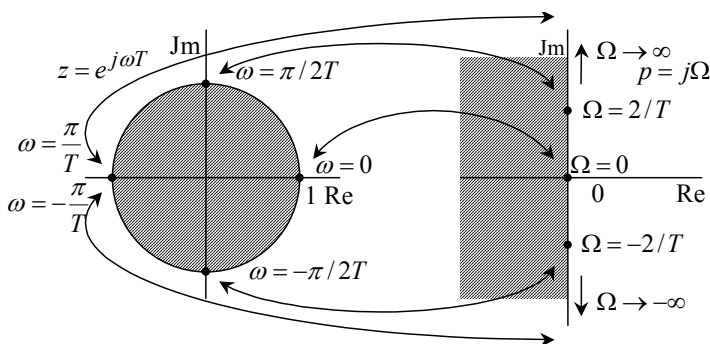


Рис. 2.16. Соответствие точек z и p плоскостей при билинейном преобразовании

2.12. Передаточные функции замкнутых импульсных систем

Импульсную систему после замены импульсного элемента соединением простейшего импульсного элемента и формирующей цепи или формирующего устройства можно представить в виде схемы [2], показанной на рис. 2.17.

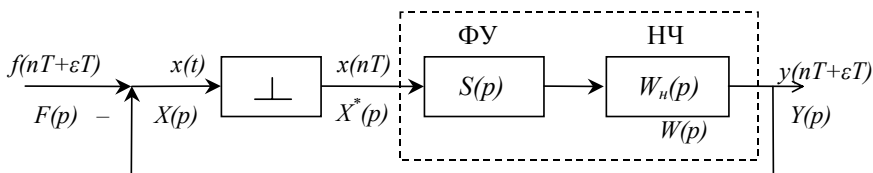


Рис. 2.17. Импульсная система с единичной обратной связью

Таким образом, импульсная автоматическая система представляет собой последовательное соединение простейшего импульсного элемента и приведенной непрерывной части, состоящей из формирующего устройства ФУ и непрерывной части НЧ [7].

Обозначим передаточную функцию приведенной части через $W(p)$, таким образом:

$$W(p) = S(p)W_n(p). \quad (2.70)$$

Тогда уравнение разомкнутой системы на входе импульсного элемента запишется в виде:

$$Y(p) = S(p)W_n(p)X^*(p) = W(p)X^*(p). \quad (2.71)$$

Поскольку система замкнута:

$$x(t) = f(t) - y(t), \quad (2.72)$$

изображение входной величины импульсного элемента имеет вид:

$$X(p) = F(p) - Y(p), \quad (2.73)$$

что представляет уравнение замыкания системы относительно изображений. Исключая из этих уравнений $Y(p)$, получим уравнение замкнутой импульсной системы:

$$X(p) = F(p) - W(p)X^*(p). \quad (2.74)$$

Это уравнение содержит изображение $X(p)$ непрерывной величины $x(t)$ и $X^*(p)$ решетчатой величины $x(nT)$, и поэтому из-за такой неоднородности его нельзя разрешить относительно одного из этих изображений.

Для того чтобы обойти эту трудность, подвергнем обе части (2.74) z -преобразованию, определяющему по изображе-

нию непрерывной функции изображение соответствующей решетчатой функции:

$$Z\{X(p)\} = Z\{F(p)\} - Z\{W(p)X^*(p)\}. \quad (2.75)$$

Согласно теореме об умножении изображений непрерывной и решетчатой функций, имеем:

$$Z\{W(p)X^*(p)\} = Z\{W(p)\}X^*(p). \quad (2.76)$$

Введем следующие обозначения: $Z\{W(p)\} = W^*(p)$, $Z\{X(p)\} = X^*(p)$, $Z\{F(p)\} = F^*(p)$, тогда

$$X^*(p) = F^*(p) - W^*(p)X^*(p), \quad (2.77)$$

откуда следует, что

$$X^*(p) = \frac{F^*(p)}{1 + W^*(p)}. \quad (2.78)$$

Здесь $W^*(p) = Z\{W(p)\} = Z\{S(p)W_n(p)\}$ – передаточная функция разомкнутой импульсной системы.

Зная $X^*(p)$, можно определить изображение непрерывных функций. Для этого подставим значение $X^*(p)$ в уравнение (2.74) и в выражение для $Y(p)$.

$$\begin{aligned} X(p) &= F(p) - \frac{W(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p); \\ Y(p) &= \frac{W(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Эти уравнения определяют изображения непрерывной ошибки и выходной величины импульсных автоматических систем. Если подвергнуть уравнение (2.79) z -преобразованию, то можно получить уравнение относительно изображения решетчатой функции выходной величины:

$$\begin{aligned} Z\{Y(p)\} &= \frac{Z\{W(p)\}}{1 + W^*(p)} F^*(p) \text{ или} \\ Y^*(p) &= \frac{W^*(p)}{1 + W^*(p)} F^*(p). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Уравнение (2.80) для импульсных автоматических систем по форме совпадает с аналогичным уравнением для непрерывных автоматических систем. Но теперь в (2.80) фигурируют изображения не непрерывных, а решетчатых функций. Выражение:

$$K^*(P) = \frac{W^*(P)}{1 + W^*(P)} \quad (2.81)$$

определяет передаточную функцию замкнутой импульсной системы.

2.13. Системы управления с дискретным фильтром

Рассмотрим общие структурные схемы, включающие дискретные фильтры. Дискретный фильтр может быть включен между импульсным элементом и непрерывной частью, либо до импульсного элемента (рис. 2.18) [2].

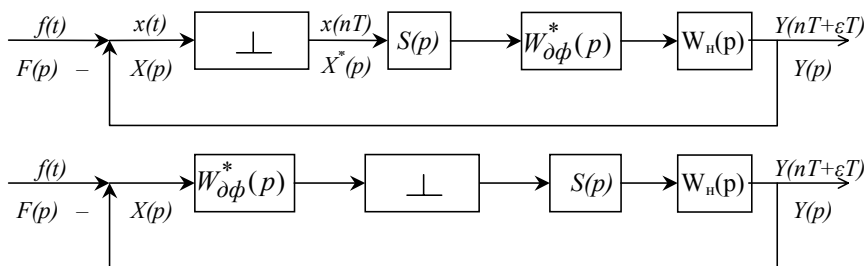


Рис. 2.18. Системы управления с дискретным фильтром

На вход дискретного фильтра ДФ поступает последовательность модулированных δ -функций. В соответствии с алгоритмом управления дискретный фильтр изменяет закон модуляции последовательности входных, идеальных импульсов, не меняя дискретной природы сигналов. Поэтому выходная переменная дискретного фильтра представляется также последовательностью δ -функций [6]. Это позволяет представить дискретный фильтр в виде эквивалентной, структурной схемы,

состоящей из некоторого непрерывного звена с передаточной функцией $W(p)$, на выходе которого установлен идеальный импульсный элемент ИИЭ, работающий синхронно и синфазно с идеальным импульсным элементом.

Уравнение дискретного фильтра в этом случае имеет вид:

$$u(t) = \sum_{k=0}^N \beta_k x(t - kT) - \sum_{k=1}^N \alpha_k u(t - kT). \quad (2.82)$$

Поскольку входные и выходные переменные непрерывны, применяя преобразование Лапласа, получим:

$$\begin{aligned} L\{x(t - kT)\} &= X(p)e^{-pkT}; \\ L\{u(t - kT)\} &= U(p)e^{-pkT}; \\ U(p) &= \sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT} X(p) - \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT} U(p). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Разрешая это уравнение относительно $U(p)$, получим:

$$U(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT}} X(p). \quad (2.84)$$

Отсюда следует, что передаточная функция дискретного фильтра равна:

$$W_{\text{дф}}(p) = \frac{U(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT}}. \quad (2.85)$$

Отсюда видно, что передаточная функция дискретного фильтра является дробно-рациональной функцией e^{pT} . В этом случае импульсная и обычная передаточная функции совпадают, т.е.

$$W_{\text{дф}}^*(p) = W_{\text{дф}}(p) = \frac{\sum_{k=0}^N \beta_k e^{-pkT}}{1 + \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-pkT}}. \quad (2.86)$$

2.14. Основные типы дискретных фильтров

При проектировании цифровых фильтров используются *реализационные критерии* и *критерии качества обработки сигналов*. Реализационные критерии определяют требования к элементам аппаратной или программной реализации фильтра: число операций умножения и сложения, число ячеек оперативной или постоянной памяти и т.д. Критерии качества определяют требования к основным характеристикам фильтра (АЧХ, ФЧХ, ГВЗ, импульсной и переходной характеристикам), влияющим на качество обработки сигналов [3].

При задании требований к характеристикам фильтра, определяющим качество обработки, часто ограничиваются заданием требований к АЧХ фильтра. Кроме того, дополнительно могут быть заданы требования к иным характеристикам.

Избирательный фильтр служит для выделения частотных составляющих входного сигнала, расположенных в полосе пропускания фильтра, и подавления частотных составляющих в полосе задержки. В зависимости от того, каким образом указанные полосы расположены относительно друг друга на частотной оси, различают следующие типы фильтров: *нижних частот* (ФНЧ), *верхних частот* (ФВЧ), *полосовой* (ПФ) и *режекторный* (РФ). На рис. 2.19 приведены идеализированные АЧХ соответствующих фильтров. Следует помнить, что все дискретные фильтры имеют периодические частотные характеристики с периодом $\omega=1$.

Под идеальным фильтром понимается фильтр, у которого передаточная функция имеет прямоугольную форму. Покажем, что такой фильтр не является физически реализуемым. Дейст-

вительно, если $H(\omega) = \sum_k a_k e^{-j2\pi\omega k}$, то $a_k = \int_{-w_0}^{w_0} e^{j2\pi\omega k} d\omega$, отку-

да вытекает, что бесконечное число слагаемых отличны от нуля как с отрицательными, так и с положительными индексами. Это означает, что в передаточной функции присутствуют слагаемые как до момента измерения, так и после. Если бы число слагаемых "после" было бы конечным, то дело свелось бы лишь к временной задержке.

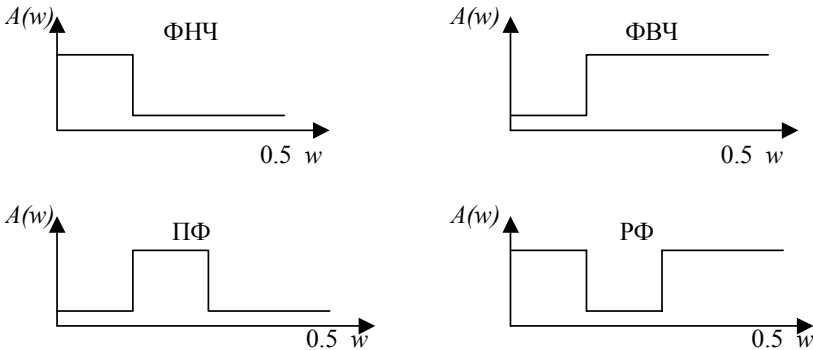


Рис. 2.19. Идеализированные АЧХ фильтров

Наиболее простыми в реализации являются БИХ-фильтры первого порядка, рассмотрим их частотные свойства. Из выражений (2.28) и (2.43) получим:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \left. \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T}} = \\
 &= \frac{b_0 + b_1 \cos(\omega T) - jb_1 \sin(\omega T)}{1 + a_1 \cos(\omega T) - ja_1 \sin(\omega T)}.
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

Таким образом, АЧХ и ФЧХ имеют вид:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos(\omega T))^2 + (b_1 \sin(\omega T))^2}{(1 + a_1 \cos(\omega T))^2 + (a_1 \sin(\omega T))^2}}; \tag{2.88}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{b_1 \sin(\omega T)}{b_0 + b_1 \cos(\omega T)} + \arctan \frac{a_1 \sin(\omega T)}{1 + a_1 \cos(\omega T)}. \quad (2.89)$$

Значения АЧХ легко определяются в характерных точках с нормированными частотами $w=0$, $w=0.25$, $w=0.5$ [4].

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \right|; \quad A\left(\frac{\pi}{2T}\right) = \sqrt{\frac{b_0^2 + b_1^2}{1 + a_1^2}}; \quad A\left(\frac{\pi}{T}\right) = \left| \frac{b_0 - b_1}{1 - a_1} \right|. \quad (2.90)$$

Допустим, АЧХ ФНЧ в характерных точках имеет значения $A(0) = 1$; $A(\pi/2T) = 0.9$; $A(\pi/T) = 0$.

Система уравнений

$$\begin{cases} b_0 + b_1 = 1 + a_1 \\ b_0^2 + b_1^2 = 0.9^2(1 + a_1^2) \\ b_0 - b_1 = 0 \end{cases} \text{ имеет два решения } \begin{matrix} a_1 = 0.34; b_0 = b_1 = 0.67 \\ a_1 = 2.88; b_0 = b_1 = 1.94 \end{matrix}.$$

Поскольку второе решение дает неустойчивый фильтр, так как $|a_1| > 1$, искомая передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = (0.67 + 0.67z^{-1}) / (1 + 0.34z^{-1}).$$

Аналогично получим передаточную функцию БИХ ФВЧ, в этом случае $A(0) = 0$; $A(\pi/2T) = 0.3$; $A(\pi/T) = 1$. Система уравнений

$$\begin{cases} b_0 + b_1 = 0 \\ b_0^2 + b_1^2 = 0.3^2(1 + a_1^2) \\ b_0 - b_1 = 1 - a_1 \end{cases} \text{ имеет два решения } \begin{matrix} a_1 = 0.522; b_0 = 0.239; b_1 = -0.239 \\ a_1 = 1.918; b_0 = -0.459; b_1 = 0.459 \end{matrix}.$$

Поскольку второе дает неустойчивый фильтр, так как $|a_1| > 1$, искомая передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = (-0.239 + 0.239z^{-1}) / (1 + 0.522z^{-1}).$$

Частотные характеристики полученных фильтров первого порядка приведены на рис. 2.20.

Полосовой и режекторный фильтр можно получить на основе БИХ-фильтра второго порядка. Частотные характеристики БИХ-фильтра получим из выражений (2.35) и (2.43):

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega T} + b_2 e^{-2j\omega T}}{1 + a_1 e^{-j\omega T} + a_2 e^{-2j\omega T}} = \quad (2.91)$$

$$= \frac{b_0 + b_1 \cos(\omega T) - j b_1 \sin(\omega T) + b_2 \cos(2\omega T) - j b_2 \sin(2\omega T)}{1 + a_1 \cos(\omega T) - j a_1 \sin(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T) - j a_2 \sin(2\omega T)}$$

Таким образом, АЧХ и ФЧХ имеют вид:

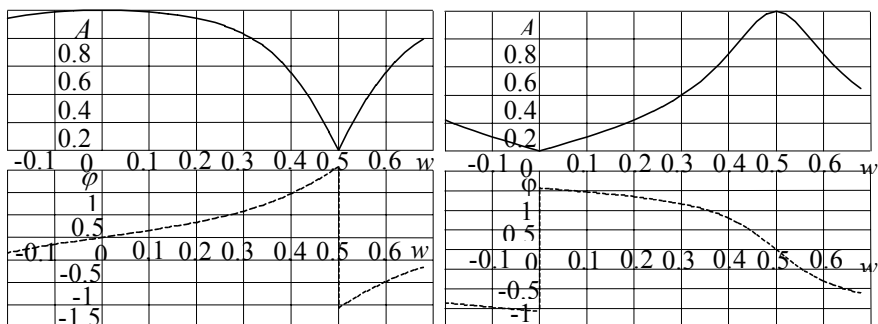
$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 \cos(\omega T) + b_2 \cos(2\omega T))^2 + (b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T))^2}{(1 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T))^2 + (a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T))^2}}; \quad (2.92)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{b_1 \sin(\omega T) + b_2 \sin(2\omega T)}{b_0 + b_1 \cos(\omega T) + b_2 \cos(2\omega T)} + \quad (2.93)$$

$$+ \arctan \frac{a_1 \sin(\omega T) + a_2 \sin(2\omega T)}{1 + a_1 \cos(\omega T) + a_2 \cos(2\omega T)}$$

Значения АЧХ легко определяются в характерных точках с нормированными частотами $\omega=0$, $\omega=0.25$, $\omega=0.5$.

$$A(0) = \left| \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \right|; \quad A\left(\frac{\pi}{2T}\right) = \sqrt{\frac{(b_0 - b_2)^2 + b_1^2}{(1 - a_2)^2 + a_1^2}}; \quad A\left(\frac{\pi}{T}\right) = \left| \frac{b_0 - b_1 + b_2}{1 - a_1 + a_2} \right|. \quad (2.94)$$



а) ФНЧ

б) ФВЧ

Рис. 2.20. Частотные характеристики фильтров первого порядка

Допустим, АЧХ ПФ в характерных точках имеет значения: $A(0) = 0$; $A(\pi/2T) = 1$; $A(\pi/T) = 0$. Подставив эти значе-

ния в (2.49), можно получить следующие соотношения $b_1 = 0$; $b_0 + b_2 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 1 - 2b_0$. Например, выберем $b_0 = 0.1$, тогда $b_2 = -0.1$; $a_2 = 0.8$. Передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = (0.1 - 0.1z^{-2}) / (1 + 0.8z^{-2}).$$

Для АЧХ РФ можно задаться характерными точками: $A(0) = 1$; $A(\pi/2T) = 0$; $A(\pi/T) = 1$. Подставив эти значения в (2.49), можно получить следующие соотношения: $b_1 = a_1 = 0$; $b_0 = b_2$; $a_2 = 2b_0 - 1$. Например, выберем $b_0 = 0.8$, тогда $b_2 = 0.8$; $a_2 = 0.6$. Передаточная функция имеет вид:

$$H(z) = (0.8 + 0.8z^{-2}) / (1 - 0.6z^{-2}).$$

Частотные характеристики полученных передаточных функций фильтров второго порядка приведены на рис. 2.21.

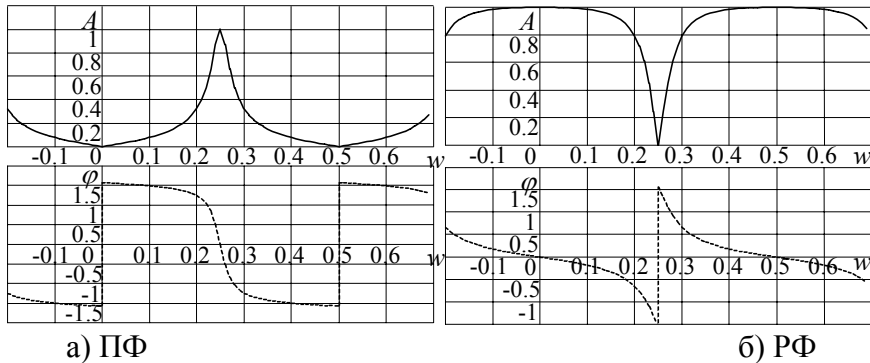


Рис. 2.21. Частотные характеристики фильтров второго порядка

2.15. Обеспечение линейности фазовой характеристики

Часто требуется получить фильтры с точно линейной ФЧХ. ГВЗ такого фильтра постоянно. Для фильтров с конечной импульсной характеристикой ФЧХ линейна при симметричности коэффициентов [4].

Передаточная функция КИХ-фильтра четвертого порядка с линейной ФЧХ имеет вид:

$$H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + bz^{-3} + az^{-4}. \quad (2.95)$$

Частотная передаточная функция дискретного фильтра получается подстановкой $z = e^{j\omega T}$ в выражение (2.95). Для анализа частотной передаточной функции удобно пользоваться формулой:

$$1 + e^{-j\varphi} = \left(e^{j\frac{\varphi}{2}} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} \right) e^{-j\frac{\varphi}{2}} = 2e^{-j\frac{\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (2.96)$$

Таким образом, частотная передаточная функция КИХ-фильтра четвертого порядка с линейной ФЧХ имеет вид:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= a + be^{-j\omega T} + ce^{-j2\omega T} + be^{-j3\omega T} + ae^{-j4\omega T} = \\ &= a(1 + e^{-j4\omega T}) + be^{-j\omega T}(1 + e^{-j2\omega T}) + ce^{-j2\omega T} = \\ &= 2ae^{-j2\omega T} \cos 2\omega T + 2be^{-j\omega T} e^{-j\omega T} \cos \omega T + ce^{-j2\omega T} = \\ &= e^{-j2\omega T} (2a \cos 2\omega T + 2b \cos \omega T + c). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Откуда можно получить АЧХ, ФЧХ и ГВЗ КИХ-фильтра четвертого порядка с линейной ФЧХ:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |2a \cos 2\omega T + 2b \cos \omega T + c|; \\ \varphi(\omega) &= -2\omega T; \\ \tau(\omega) &= 2T. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Аналогично можно получить частотные характеристики КИХ-фильтра с симметричными коэффициентами любого четного порядка. В случае нечетного порядка фильтра вид частотных характеристик несколько отличается. Например, КИХ-фильтр пятого порядка с симметричными коэффициентами имеет вид:

$$H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} + cz^{-3} + bz^{-4} + az^{-5}. \quad (2.99)$$

Выполнив аналогичные (2.97) преобразования, получим:

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= a + be^{-j\omega T} + ce^{-j2\omega T} + ce^{-j3\omega T} + be^{-j4\omega T} + ae^{-j5\omega T} = \\
&= a(1 + e^{-j5\omega T}) + be^{-j\omega T}(1 + e^{-j3\omega T}) + ce^{-j2\omega T}(1 + e^{-j\omega T}) = \\
&= 2ae^{-j\frac{5\omega T}{2}} \cos\frac{5\omega T}{2} + 2be^{-j\omega T} e^{-j\frac{3\omega T}{2}} \cos\frac{3\omega T}{2} + 2ce^{-j2\omega T} e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cos\frac{\omega T}{2} = \\
&= e^{-j\frac{5\omega T}{2}} 2\left(a \cos\frac{5\omega T}{2} + b \cos\frac{3\omega T}{2} + c \cos\frac{\omega T}{2}\right). \quad (2.100)
\end{aligned}$$

Откуда можно получить АЧХ, ФЧХ и ГВЗ КИХ-фильтра пятого порядка с линейной ФЧХ:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= 2 \left| a \cos\frac{5\omega T}{2} + b \cos\frac{3\omega T}{2} + c \frac{\omega T}{2} \right|; \\
\varphi(\omega) &= -\frac{5\omega T}{2}; \quad (2.101) \\
\tau(\omega) &= \frac{5T}{2}.
\end{aligned}$$

В общем, передаточную функцию КИХ-фильтра порядка N $H(z) = \sum_{k=0}^N h_k z^{-k}$ с симметричными коэффициентами можно записать при четном N

$$H(z) = h_N z^{-\frac{N}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k (z^{-k} + z^{-N+k}), \quad (2.102)$$

при нечетном N

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} h_k (z^{-k} + z^{-N+k}). \quad (2.103)$$

Частотные передаточные функции для КИХ-фильтра при четном N :

$$H(\omega) = e^{-j\frac{N\omega T}{2}} \left(h_{\frac{N}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \cos\left(\left(\frac{N}{2} - k\right)\omega T\right) \right); \quad (2.104)$$

при нечетном N

$$H(\omega) = 2e^{-j\frac{N\omega T}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} h_k \cos\left(\left(\frac{N}{2} - k\right)\omega T\right). \quad (2.105)$$

Таким образом, ФЧХ и ГВЗ в обоих случаях совпадают:

$$\varphi(\omega) = -\frac{N\omega T}{2}, \quad \tau(\omega) = \frac{NT}{2}, \quad (2.106)$$

а АЧХ имеет вид при четном N

$$A(\omega) = \left| h_{\frac{N}{2}} + 2 \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} h_k \cos\left(\left(\frac{N}{2} - k\right)\omega T\right) \right|, \quad (2.107)$$

при нечетном N

$$A(\omega) = \left| 2 \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} h_k \cos\left(\left(\frac{N}{2} - k\right)\omega T\right) \right|. \quad (2.108)$$

В качестве примера рассмотрим КИХ-фильтр с линейной ФЧХ четвертого порядка. Значение АЧХ в характерных точках в соответствии с (2.98):

$$A(0) = 2a \cos 2\omega T + 2b \cos \omega T + c = 2a + 2b + c;$$

$$A(\pi/2T) = -2a + c;$$

$$A(\pi/T) = 2a - 2b + c.$$

Например, для фильтра нижних частот можно записать $A(0) = 1; A(\pi/2T) = 0; A(\pi/T) = 0$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 1 \\ -2a + c = 0 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases},$$

получим $a = 0.125; b = 0.25; c = 0.25$. Таким образом, передаточная функция КИХ ФНЧ имеет вид: $H(z) = 0.125 + 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2} + 0.25z^{-3} + 0.125z^{-4}$.

Аналогично можно получить передаточные функции других КИХ-фильтров с линейной ФЧХ.

КИХ ФВЧ

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \\ 2a - 2b + c = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0.125; b = -0.25; c = 0.25; \\ H(z) = 0.125 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2} - 0.25z^{-3} + 0.125z^{-4}. \end{matrix}$$

Полосовой КИХ-фильтр

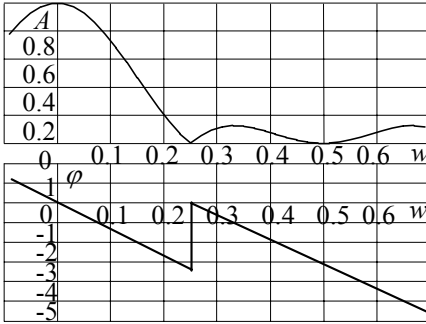
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 0 \\ -2a + c = 1 \\ 2a - 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -0.25; b = 0; c = 0.5; \\ H(z) = -0.25 + 0.5z^{-2} - 0.25z^{-4}. \end{matrix}$$

Режекторный КИХ-фильтр

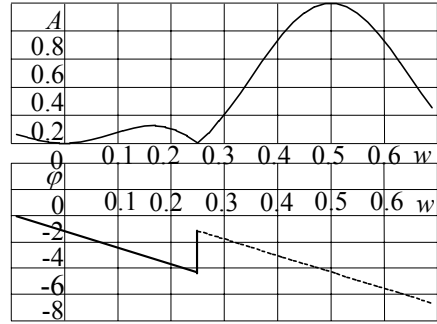
$$\begin{cases} 2a + 2b + c = 1 \\ -2a + c = 0 \\ 2a - 2b + c = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0.25; b = 0; c = 0.5; \\ H(z) = 0.25 + 0.5z^{-2} + 0.25z^{-4}. \end{matrix}$$

Нормированные частотные характеристики для полученных КИХ-фильтров приведены на рис. 2.22.

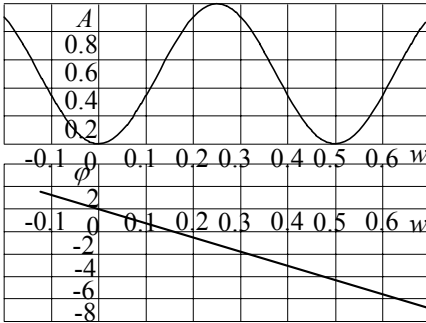
Следует отметить, что полосовой и режекторный фильтр действительно имеют линейную ФЧХ. Для ФНЧ и ФВЧ фазовая характеристика имеет скачок на величину π , вызванный изменением знака выражения $2a \cos 2\omega T + 2b \cos \omega T + c$ в точке $\omega = \pi/2T$.



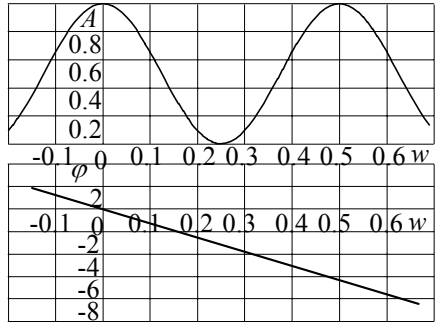
а) ФНЧ



б) ФВЧ



в) полосовой фильтр



г) режекторный фильтр

Рис. 2.22. АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтров четвертого порядка с симметричными коэффициентами

2.16. Методы расчета дискретных фильтров

При определении дискретных передаточных функций БИХ-фильтров используются три класса методов [8]:

- методы преобразования аналоговых передаточных функций в цифровые;
- прямые методы расчета БИХ-фильтров;
- методы, использующие алгоритмы оптимизации.

Прямые методы расчета заключаются в поиске коэффициентов фильтра по заданным частотным свойствам. При этом необходимо выбрать базисный фильтр. Одним из базисных фильтров является *фильтр Баттерворта (Butterworth)*. Фильтр нижних частот имеет передаточную функцию:

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\pi w)}{A}\right)^{2M}}, \quad |w| < 1/2. \quad (2.109)$$

Это фильтр порядка M . В зависимости от значений M, A меняются характеристики фильтра. Задача заключается в отыскании вещественных коэффициентов фильтра по заданным параметрам. Будем искать фильтр в виде $y(nT) = -a_1 y((n-1)T) - a_2 y((n-2)T) - \dots - a_M y((n-M)T) + b x(nT)$.

Передаточная функция имеет вид $H(z) = \frac{b}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}$.

Положим $z = e^{j2\pi w}$. Тогда $z + 1/z = 2 \cos(2\pi w)$ и $1 - (z + 1/z)/2 = 2 \sin^2(\pi w)$. Должно быть выполнено равенство

$$H(z)H(\bar{z}) = H(z)H(1/z) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 - z - 1/z}{4A^2}\right)^M}.$$

В левой и правой частях в знаменателе находятся многочлены от переменной z . Найдем корни этих многочленов. Множество корней по построению инвариантно относительно замены $z \rightarrow 1/z$. Для устойчивости фильтра нужно, чтобы корни находились внутри единичного круга. Для отыскания нулей знаменателя в правой части получим уравнение $(2 - z - 1/z)^M = -(2A)^{2M}$, откуда $2 - z - 1/z = (2A)^2 e_k$, $k = 1, \dots, M$, где e_k – корень степени M из -1 . Каждое из этих уравнений сводится к квадратному уравнению. Найдем корни этих уравнений и выберем те из них, которые по модулю меньше единицы. Составим произведение

$f(z) = (1 - e_1 z^{-1}) \dots (1 - e_M z^{-1})$. Проблема может возникнуть лишь в случае, когда среди корней окажется корень, равный по модулю 1. Такая ситуация невозможна, так как в противном

случае $1 + \left(\frac{\sin(\pi w)}{2A}\right)^{2M} = 0$ для некоторого w_0 .

Например, в случае $M = 2$, для отыскания коэффициента b достаточно положить $z = 1$. Тогда $b = |f(1)|$.

Фильтр верхних частот может быть получен из (2.109) заменой $w \rightarrow w + 1/2$, откуда следует

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos(\pi w)}{A}\right)^{2M}}. \text{ Это частотная передаточная функ-}$$

ция фильтра верхних частот. С другой стороны, из выражения $1 + a_1 e^{-2j\pi w} + \dots + a_M e^{-2j\pi M w}$ при указанной замене получим $1 - a_1 e^{-2j\pi w} + \dots + (-1)^M a_M e^{-2j\pi M w}$. Это означает, что фильтр верхних частот можно получить из фильтра нижних частот заменой знака у коэффициентов знаменателя с нечетными индексами.

При последовательном соединении фильтров верхних и нижних частот их передаточные функции перемножаются. В результате получаем передаточную функцию полосового фильтра. Это наиболее простой способ получения полосового фильтра, но при этом повышается размерность.

При проектировании КИХ-фильтров может использоваться метод сглаживающих окон.

Предположим, что функция $H(w)$ задана на интервале $[-1/2, 1/2]$. Представим ее в виде ряда $H(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-j2\pi w k}$.

Для получения КИХ-фильтра с аппроксимирующей передаточной функцией можно оставить лишь конечное число слагаемых в этой сумме. Если выбираются максимальные по модулю коэффициенты, то результирующая передаточная функция $\tilde{H}(w)$ будет наилучшей аппроксимацией в смысле наименьших квадратов при заданном числе слагаемых. Оказывается, что такой подход не всегда приемлем. Выясним, что происходит при обрезании ряда. Введем функцию $W(k)$, равную 1 при $0 \leq k \leq N-1$ и 0 в остальных точках. Усеченная импульс-

ная характеристика может быть получена как результат умножения исходной характеристики на прямоугольное окно. Тогда

$$\tilde{H}(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(k)c_k e^{-j2\pi wk} = W(w) * H(w). \text{ Найдем } z\text{-преобразование оконной функции:}$$

$$W(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}. \quad (2.110)$$

Таким образом, комплексная частотная характеристика имеет вид:

$$W(w) = \frac{1-e^{-j2\pi wN}}{1-e^{-j2\pi w}} = \frac{e^{-j\pi wN}(e^{j\pi wN} - e^{-j\pi wN})}{e^{-j\pi w}(e^{j\pi w} - e^{-j\pi w})} = \frac{\sin(\pi wN)}{\sin(\pi w)} e^{-j\pi w(N-1)}. \quad (2.111)$$

График этой функции для $N=6$ изображен на рис. 2.23.

Чтобы снизить указанный эффект, вместо прямоугольных окон используются другие окна: треугольные окна, окно Хэмминга $w(nT) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M)$, $n = 0, \dots, M$ и некоторые другие. Эти окна отличаются тем, что для их преобразований Фурье боковые лепестки выражены менее ярко.

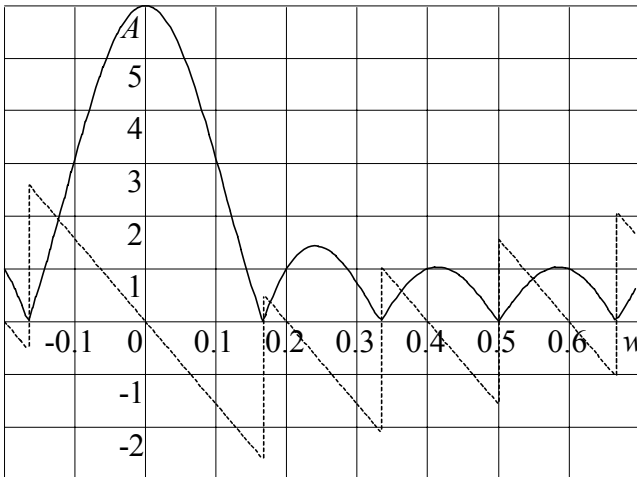


Рис. 2.23. Частотная характеристика прямоугольного окна

3. ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Квантование является следствием применения устройств, выполняющих цифровую обработку сигналов с конечным числом двоичных разрядов. При расчете дискретных последовательностей $x(nT)$ в цифровых устройствах, эти последовательности представляются в виде *двоичного кода*, и в соответствии с алгоритмами выполняются арифметические операции цифровых кодов [5]. При этом алгоритм функционирования выполняется с ошибками. Эти ошибки обусловлены квантованием входных сигналов, квантованием коэффициентов передаточных функций и ошибок округления при выполнении арифметических операций. Эти ошибки часто называют ошибками квантования, и они не должны превосходить допустимой величины. Поскольку увеличение числа разрядов повышает сложность и снижает быстродействие устройств цифровой обработки сигналов, при проектировании стремятся минимизировать число разрядов, исходя из допустимого уровня шумов квантования.

Другим важным критерием качества цифровой системы является ее *быстродействие*, определяемое временем T_{\min} , необходимым для вычисления одного отсчета выходного сигнала. Очевидно, что всегда должно выполняться условие $T_{\min} \leq T$, где T – заданный период дискретизации сигналов.

Для управляющих систем, работающих в реальном масштабе времени, быстродействие является определяющим фактором. Повышение быстродействия связано с математическими и аппаратными затратами.

Квантование относится к нелинейным операциям над сигналами, поэтому строгий расчет шумов квантования весьма сложен и выполняется на моделях, проектируемых с помощью универсальных ЭВМ. Однако, учитывая, что шумы квантования обычно малы по сравнению с полезными сигналами, мож-

но проводить расчеты помех как независимых от полезных сигналов.

3.1. Формы представления чисел

В цифровых устройствах различают обычно два типа представления чисел: с *фиксированной* и *плавающей* запятой [3]. При представлении числа A с фиксированной запятой предполагают $|A| < 1$, запятая располагается между первым и вторым разрядами числа. Старший разряд служит для фиксации знака и называется *знаковым*. Следующие b разрядов служат для фиксации дробной части и называются *числовыми*. На рис. 3.1 условно изображен регистр, содержащий восемь двоичных разрядов, из которых один разряд является знаковым, и семь числовых разрядов.

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
0	0	0	1	1	0	0	1
Знак	числовые разряды						

Рис. 3.1. Представление числа с фиксированной запятой

Разрядная сетка, содержащая $b+1$ двоичных разрядов, позволяет представить 2^b различных по абсолютной величине чисел с шагом 2^{-b} в диапазоне $0..1-2^{-b}$:

$$0 \leq |A| \leq 1 - 2^{-b}. \quad (3.1)$$

При выполнении арифметических операций результат может выйти за верхний предел неравенства (3.1), что приводит к искажению результата.

Для перевода числа $|A| < 1$ из одной системы счисления в другую его умножают на основание системы счисления. Целая часть полученного числа является искомым разрядом, а дробную часть снова умножают на основание системы счисления и далее проводят аналогичные преобразования.

В качестве примера рассмотрим двоичное представление десятичного числа $A_{10}=0.2$: $0.2 \cdot 2=0.4$; $0.4 \cdot 2=0.8$; $0.8 \cdot 2=1.6$;

$0.6 \cdot 2 = 1.2$; $0.2 \cdot 2 = 0.4$ и т.д. Таким образом получено двоичное число $A_2 = 0.00110011\dots = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} + \dots$

Представление чисел с плавающей запятой основано на соотношении:

$$A = \pm \mu p^{\pm \gamma}, \quad (3.2)$$

где p – основание системы счисления; μ – мантисса (правильная дробь), γ – порядок (целое число).

Диапазон представления чисел в формате с плавающей точкой существенно шире, чем формат с фиксированной точкой. Поэтому вероятность переполнения значительно уменьшается. Однако сами арифметические операции усложняются, поскольку действия необходимо выполнять как с мантиссами, так и с порядками.

Поскольку в управляющих системах быстродействие является определяющим параметром, как правило, используют представление с фиксированной точкой.

Существуют три способа кодирования чисел: *прямой код*, *обратный код* и *дополнительный код*. Рассмотрим кодирование положительных и отрицательных двоичных чисел с фиксированной запятой, удовлетворяющих условию (3.1)

$$A = \pm 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m, \quad (3.3)$$

где a_i – числовые разряды с весом 2^i , $i=1..m$.

Прямой код. В знаковый разряд кода записывается 0 для положительных чисел или 1 для отрицательных, числовые разряды кода совпадают с числовыми разрядами самого числа.

$$[A]_{np} = \begin{cases} 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m & \text{при } A > 0 \\ 1.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m & \text{при } A \leq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Обратный код положительного числа совпадает с прямым кодом, а для отрицательных чисел все разряды инвертируются.

$$[A]_{об} = \begin{cases} 0.a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m & \text{при } A > 0 \\ 1.\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4 \dots \bar{a}_m & \text{при } A \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Дополнительный код положительного числа совпадает с прямым кодом, для отрицательных чисел все разряды инвертируются, к младшему разряду добавляется 1.

$$[A]_{\text{дон}} = \begin{cases} 0.a_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\dots\bar{a}_m & \text{при } A > 0 \\ 1.\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_4\dots\bar{a}_m + 2^{-m} & \text{при } A \leq 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Обычно для представления чисел используется дополнительный код, поскольку операции сложения и вычитания для чисел со знаком могут проводиться без дополнительных проверок на знаки чисел.

3.2. Оценка ошибок квантования

В реальных устройствах цифровой обработки сигналов возникают эффекты, связанные с ошибками квантования входных сигналов и конечной разрядностью регистров. Источниками ошибок квантования являются аналого-цифровые преобразователи, округление результатов арифметических операций, неточности реализации дискретных передаточных функций из-за округления коэффициентов [1]. Эти ошибки приводят к погрешностям в выходных сигналах цифровой системы управления, а в некоторых случаях – к неустойчивым режимам работы. Далее с целью упрощения анализа систем предполагается, что возникающие ошибки приводят к возникновению шума квантования сигналов, который не зависит от входного сигнала.

Как правило, в устройствах цифровой обработки сигналов выделяют пять основных причин возникновения ошибок квантования [4]:

1. Квантование сигналов при аналого-цифровом преобразовании приводит к дополнительным шумам на входе системы, снижение чувствительности и динамического диапазона, нелинейные искажения сигналов малого уровня.

2. Квантование коэффициентов дискретных передаточных функций приводит к искажению частотных характеристик.

3. Переполнения в сумматорах приводят к колебаниям переполнения высокого уровня.

4. Округление при умножении приводит к шумам округления.

5. Мертвая зона приводит к колебаниям предельного цикла.

Для анализа погрешностей преобразования аналогового сигнала в цифровой АЦП представляют как последовательное соединение *дискретизатора* и *квантователя* (рис. 3.2, а). Дискретизатор обычно условно обозначают ключом, который замыкается на бесконечно малое время с периодом дискретизации T , преобразуя, таким образом, непрерывный сигнал в дискретный. Квантователь представляется безинерционным элементом со ступенчатой характеристикой (рис. 3.2, б). Квантование является нелинейной операцией (2.3) и определяется нелинейной функцией квантования $x_{Ц}(nT) = F_K(x(nT))$, устанавливающей связь между решетчатой функцией $x(nT)$ и квантованной решетчатой функцией $x_{Ц}(nT)$.

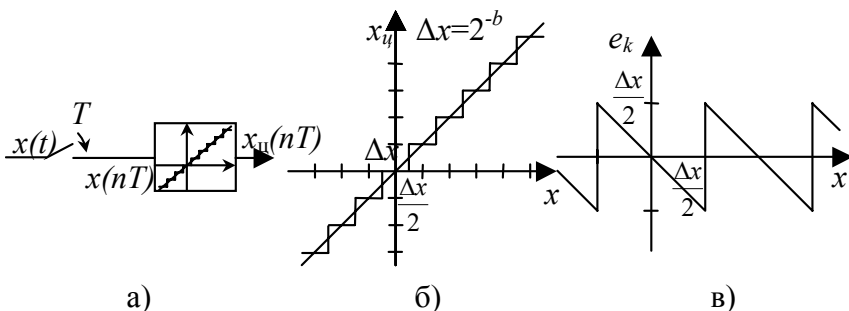


Рис. 3.2. Ошибки квантования в цифровых системах

Величина шага квантования определяется весом младшего числового разряда

$$\Delta x = 2^{-b}, \quad (3.7)$$

где b – число разрядов цифрового сигнала $x_{Ц}(nT)$.

При квантовании может использоваться как округление (рис. 3.2), так и усечение сигналов. В результате квантования последовательность $x(nT)$ представляется с ошибкой:

$$e_k = x_q - x = F_k(x) - x. \quad (3.8)$$

Таким образом, сигнал ошибки квантования может быть представлен как результат прохождения исходного сигнала через элемент с периодической пилообразной характеристикой (рис. 3.2, в).

Следовательно, абсолютное значение максимальной ошибки квантования имеет вид:

$$e_{\max} = \max|e_k| = \frac{\Delta x}{2} = \frac{2^{-b}}{2} = 2^{-b-1}. \quad (3.9)$$

При анализе влияния ошибок квантования в цифровых системах используется как линейная, так и нелинейная модели процесса квантования. Нелинейная модель используется, как правило, при моделировании процесса цифровой обработки сигналов на ЭВМ и точно описывает нелинейный процесс квантования отсчетов сигнала. Линейная модель процесса квантования используется для приближенного описания нелинейной операции квантования при аналитическом исследовании процессов в цифровых системах.

При построении модели нелинейного цифрового устройства, включающего операцию квантования устройства, нелинейный квантователь заменяется на соответствующий линейный, к выходному сигналу которого добавляется аддитивный сигнал $e_k(nT)$, учитывающий ошибку квантования (рис. 3.3):

$$e_k(nT) = x_q(nT) - x(nT). \quad (3.10)$$

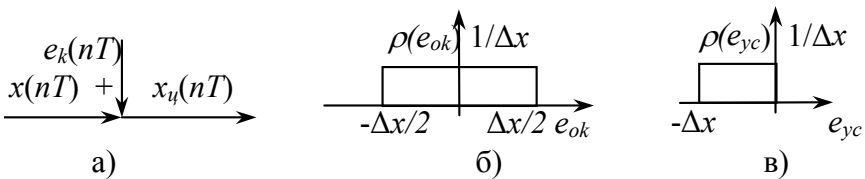


Рис. 3.3. Линейная модель квантования

Для оценки характеристик ошибок квантования сигнала по линейной модели используют вероятностные оценки, полагая, что последовательность $e_k(nT)$ является случайным стационарным процессом с равномерным распределением вероятности по диапазону ошибок квантования. На рис. 3.3, б и рис. 3.3, в приведены плотности вероятности $\rho(e_k)$ ошибки квантования e_k при округлении и усечении. Математическое ожидание (среднее значение) ошибки квантования e_k определяется по формуле [1]:

$$\mu_e = E(e) = \int_{-\infty}^{\infty} e \rho(e_k) de. \quad (3.11)$$

Следовательно, математическое ожидание ошибки квантования при округлении сигналов $\mu_{ок} = 0$, и при усечении

$$\mu_{ус} = -\Delta x / 2 = -2^{-b-1}.$$

Дисперсия шума квантования определяется по формуле:

$$\sigma_e^2 = E((e - \mu_e)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 \rho(e_k) de = E(e^2) - \mu_e^2. \quad (3.12)$$

Определим величину дисперсии при квантовании сигналов путем округления:

$$\begin{aligned} \sigma_{ок}^2 &= \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} e_k^2 \rho(e_k) de = \frac{1}{3\Delta x} \left(\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \right) = \frac{\Delta x^2}{12} = \\ &= \frac{(2^{-b})^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку реакция системы с импульсной характеристикой $h(nT)$ на входную последовательность $x(nT)$ определяется выражением (3.10)

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)h(nT - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(nT - kT)h(kT), \quad (3.14)$$

а последовательность ошибки квантования входного сигнала $e_{ок}(nT)$ накладывается на входные сигналы, используя свойство

линейности системы, можно вычислить реакцию системы $e_{\text{вых}}(nT)$ на входной шум:

$$e_{\text{вых}}(nT) = \sum_{k=0}^{\infty} e_{\text{вх}}(nT - kT)h(kT). \quad (3.15)$$

Максимальную ошибку на выходе системы при квантовании входного сигнала получим подстановкой выражения (3.9) в (3.15):

$$E_{\text{вых}} = \max|e_{\text{вых}}(nT)| = \max|e_{\text{вх}}(nT)| \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)| = 2^{-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} |h(kT)|. \quad (3.16)$$

Дисперсию на выходе системы при квантовании входного сигнала определим из выражений (3.12) и (3.15):

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT). \quad (3.17)$$

Дисперсия шума квантования часто выражается в логарифмическом масштабе.

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 (\text{дБ}) &= 10 \lg\left(\frac{\Delta x^2}{12}\right) = 10 \lg\left(\frac{2^{-2b}}{12}\right) = \\ &= -20b \lg(2) - 10 \lg(12) \approx -6.02b - 10.79 \text{ дБ}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Качество процедуры дискретизации определяется величиной $Q = \sigma_{\text{вх}}^2 / \sigma_e^2$, где $\sigma_{\text{вх}}^2$ – дисперсия исходного сигнала. Используя выражение (3.18), получим отношение мощности входного сигнала к мощности шума в логарифмическом масштабе:

$$\begin{aligned} Q &= 10 \lg \frac{\sigma_{\text{вх}}^2}{\sigma_e^2} = 10 \lg \sigma_{\text{вх}}^2 - 10 \lg \frac{2^{-2b}}{12} = 10 \lg \sigma_{\text{вх}}^2 + 20b \cdot \lg 2 + 10 \lg 12 \approx \\ &\approx 10 \lg \sigma_{\text{вх}}^2 + 6.02b + 10.79 \text{ дБ}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, при увеличении числа разрядов квантования на один разряд отношение сигнал-шум увеличивается на 6 дБ.

Например, хороший уровень качества 90 дБ достигается при $b=15$.

Реализация алгоритма вычисления дискретных передаточных функций (2.20) связана с операциями сложения и ум-

ножения на постоянные коэффициенты. При арифметических операциях с фиксированной запятой цифровые сигналы масштабируются.

Масштабирование (умножение на константу) сводится к арифметическому сдвигу разрядов числа, если коэффициенты равны степеням числа 2. В результате округления k -разрядного числа до b разрядов ($b < k$) младшие ($k - b$) разряды исходного числа отбрасываются. Ошибка квантования $e_k = F_k(x) - x$ имеет величину $|e_k| < 2^{-b-1}$. Дисперсия ошибки масштабирования, таким образом, составит (3.13) $\sigma_{em}^2 = 2^{-2b}/12$.

Сложение чисел с фиксированной запятой при разрядности суммы не меньшей разрядности слагаемых выполняется без ошибок. Однако, если масштабирование выполнено неправильно, суммирование чисел может привести к переполнению. Обычный сумматор с фиксированной запятой при учете переполнения становится нелинейным устройством. В результате переполнения возникают колебания сигналов большого уровня, что дает стопроцентную ошибку.

Для уменьшения искажений переполнения можно использовать суммирование с насыщением, при котором сумма числа ограничивается. Таким образом, сумматор с насыщением эквивалентен ограничителю, что исключает резкие скачки переполнения.

Выполнение операции умножения связано с ошибками округления. Произведение двух чисел с фиксированной запятой и с разрядностью до b_1, b_2 соответственно может содержать $(b_1 + b_2)$ разрядов. В результате округления произведения возникает ошибка умножения. В предположении, что шумы квантования от разных источников статистически независимы, можно построить модель идеального умножителя с конечным числом разрядов. Ошибка квантования на выходе модели определяется числом разрядов произведения b_m . В результате

максимальная ошибка умножения составит $|e_{ум}| < 2^{-b_m-1}$. Дисперсия ошибки умножения, таким образом, составит, согласно формуле (3.13), $\sigma_{e_{ум}}^2 = 2^{-2b_m}/12$.

Следует отметить, что общая ошибка, обусловленная квантованием входного сигнала и квантованием результатов арифметических операций, определяется суммой оценок соответствующих ошибок.

При одинаковой разрядности входного, выходного сигналов и коэффициентов передаточной функции основной вклад в полный выходной шум вносит собственный шум квантования коэффициентов передаточной функции, поскольку входной шум частично подавляется арифметическими операциями. Поэтому разрядность регистров при выполнении расчетов выбирают выше разрядности входного АЦП.

При реализации дискретных передаточных функций значения коэффициентов квантуются, и ошибки квантования приводят к искажению частотных характеристик. Величина искажения частотных характеристик не должна превышать заданную допустимую величину. Необходимое число разрядов в квантованных коэффициентах определяют путем вычисления частотных характеристик, причем число разрядов увеличивают до выполнения заданных условий.

Иногда влияние квантования коэффициентов фильтра учитывают путем введения параллельного соединения передаточной функции с неквантованными коэффициентами и паразитного звена, коэффициенты которого зависят от погрешности квантования коэффициентов исходной передаточной функции. При этом оценивают среднеквадратическое отклонение АЧХ (и других частотных характеристик) реальной передаточной функции от характеристики идеального фильтра. Это также позволяет оценить допустимое число разрядов коэффициентов фильтра.

Возможны и другие методы, основанные на предварительном изучении чувствительности частотных характеристик к малым изменениям его коэффициентов, а также методы, учитывающие конкретные структуры звеньев.

Кроме искажения частотных характеристик, квантование коэффициентов передаточных функций влияет на положение нулей и полюсов на комплексной плоскости. Поскольку положение полюсов передаточной функции на комплексной плоскости определяет устойчивость системы, квантование коэффициентов может снизить устойчивость системы.

Положение полюсов определяется значениями коэффициентов a_m передаточной функции (3.18). Полином знаменателя можно представить в виде

$$A(z) = 1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_M}{z}\right). \quad (3.20)$$

Определим чувствительность полюсов z_i к изменениям коэффициентов a_m . Допустим, полюс изменяется на величину dz_i , при этом коэффициенты a_m получают приращение da_m . Выражение (3.20) можно записать как:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_i + dz_i}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_M}{z}\right) &= \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_i}{z} - \frac{dz_i}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_M}{z}\right) = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^M (a_m + da_m) z^{-m} = 1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} + \sum_{m=1}^M da_m z^{-m}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вычитая из данного выражения (3.20), получим:

$$\begin{aligned} -\frac{dz_i}{z_i} \left(1 - \frac{z_1}{z_i}\right) \dots \left(1 - \frac{z_M}{z_i}\right) &= \sum_{m=1}^M da_m z^{-m}; \\ dz_i &= -\frac{\sum_{m=1}^M da_m z_i^{1-m}}{\prod_{k=1, k \neq i}^M \left(1 - \frac{z_k}{z_i}\right)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Полученные результаты нетрудно распространить на случай полюсов любой кратности.

Формула (3.22) в каждом конкретном случае при прямой реализации передаточной функции позволяет рассчитать смещение полюсов фильтра на комплексной плоскости в зависимости от изменений коэффициентов a_m из-за квантования.

Одним из требований, предъявляемых к цифровым системам, является обеспечение определенного *динамического диапазона* D , под которым понимается отношение максимальной амплитуды A_{\max} к минимальной амплитуде A_{\min} входного сигнала, при которой поддерживается заданное отношение сигнал/шум на выходе $R_{ш}^D$:

$$D(\partial B) = 20 \lg \frac{A_{\max}}{A_{\min}}; \quad (3.23)$$

$$R_{ш}^D(\partial B) = 10 \lg \frac{P_{\min}^D}{P_{ш}}, \quad (3.24)$$

где P_{\min}^D – мощность на нижней границе динамического диапазона (при амплитуде входного сигнала, равной A_{\min} , $P_{ш}$ – мощность полного выходного шума.

Амплитуду входного сигнала A_{\min} на нижней границе динамического диапазона можно получить из (3.23) при $A_{\max}=1$:

$$A_{\min} = 10^{-D/20}. \quad (3.25)$$

Минимальная амплитуда входного сигнала определяется разрядностью кода входного сигнала. При разрядности АЦП, равной b , минимальная амплитуда входного сигнала $A_{\text{ex min}} = 2^{-b}$. Поэтому амплитуда на нижней границе динамического диапазона A_{\min} больше или равна минимальной амплитуде входного сигнала:

$$A_{\min} = 10^{-D/20} \geq A_{\text{ex min}} = 2^{-b}. \quad (3.26)$$

Оценку динамического диапазона, как правило, проводят для синусоидального входного сигнала, при этом мощность выходного сигнала на нижней границе динамического диапазона $P_{\min}^D = A_{\min}^2 / 2$, из (3.24) получим:

$$R_{ш}^D(\text{дБ}) = 10 \lg \frac{A_{\min}^2}{2P_{ш}}. \quad (3.27)$$

Подставив выражение (3.25) амплитуды входного сигнала A_{\min} на нижней границе динамического диапазона, получим:

$$\begin{aligned} R_{ш}^D &= 10 \lg \frac{10^{-D/10}}{2P_{ш}} = 10 \frac{-D}{10} - 10 \lg 2 - 10 \lg P_{ш} \approx \\ &\approx -D(\text{дБ}) - 3.01 - P_{ш}(\text{дБ}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Под *динамическим диапазоном входного сигнала* $D_{\text{вх}}$ понимается отношение максимальной амплитуды $A_{\text{вх max}}$ к минимальной амплитуде $A_{\text{вх min}}$ входного сигнала:

$$\begin{aligned} D(\text{дБ}) &= D_{\text{АЦП}}(\text{дБ}) = 20 \lg \frac{A_{\text{вх max}}}{A_{\text{вх min}}} = 20 \lg \frac{1}{2^{-b}} = \\ &= 20 \lg 2^b = b 20 \lg 2 \approx b \cdot 6.02. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Пороговым отношением сигнал/шум $R_{ш}^n$ называют отношение минимальной мощности выходного сигнала к мощности шума на выходе системы:

$$\begin{aligned} R_{ш}^n &= 10 \lg \frac{P_{c \min}}{P_{ш}} = 10 \lg \frac{A_{\text{вх min}}^2}{2P_{ш}} = 10 \lg \frac{2^{-2b}}{2P_{ш}} \approx \\ &\approx -D_{\text{АЦП}}(\text{дБ}) - 3.01 - P_{ш}(\text{дБ}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3. Предельные циклы

Устойчивое рекурсивное звено, построенное на основе арифметического устройства с неограниченной точностью, после прекращения воздействия имеет на выходе затухающий до нуля отклик. Если такое звено выполнено на основе регистров с конечной разрядностью, то выходной сигнал также уменьшается, но, достигнув определенного ненулевого уровня, может перестать затухать и принять колебательный характер [1]. Этот эффект часто называют *режимом предельного цикла низкого*

уровня. Он является следствием наличия зоны нечувствительности (*мертвой зоны*) квантователя в обратной связи звена. Наличие мертвой зоны для сигналов низкого уровня делает невозможным предположить статистическую характеристику шумов квантования. Поэтому анализ режимов предельного цикла проводят путем прямого моделирования на ЭВМ.

Рассмотрим рекурсивный фильтр первого порядка (рис. 3.4), описываемый нелинейным разностным уравнением:

$$y_{ц}(nT) = F_{окр} \{x_{ц}(nT) - a_1 y_{ц}((n-1)T)\}, \quad (3.31)$$

где $F_{окр}$ – нелинейная функция округления.

При отсутствии входного сигнала $x_{ц}(nT)=0$, из-за эффекта округления отсчетов обрабатываемого сигнала на выходе $y_{ц}(nT)$ может установиться постоянная величина $E_{вых}$, либо периодические колебания с амплитудой $E_{вых}$. Поскольку максимальная ошибка округления (3.9) составляет $e_{окр} = 2^{-b-1}$, где b – число разрядов последовательности $y_{ц}(nT)$, для установившегося значения сигнала на выходе $y_{ц}(nT) = E_{вых}$ можно записать:

$$\begin{aligned} E_{вых} &\leq |a_1| E_{вых} + e_{окр}; \\ E_{вых} &\leq \frac{2^{-b-1}}{1 - |a_1|}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

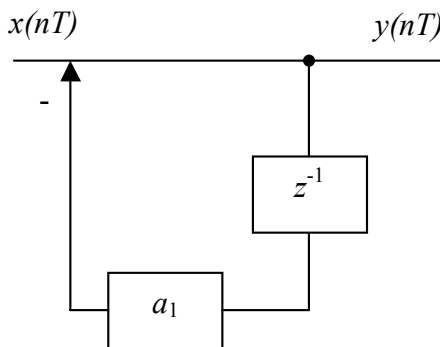


Рис. 3.4. Рекурсивный фильтр первого порядка

Амплитуда предельного цикла тем больше, чем ближе расположен полюс к единичной окружности, и чем меньше разрядность последовательности $y_n(nT)$. Для уменьшения амплитуды предельных циклов низкого уровня следует увеличивать число разрядов числовых последовательностей, что уменьшает и шумы квантования.

Поскольку минимальное по абсолютному значению, отличное от нуля число с фиксированной точкой имеет величину $E_{\min}=2^{-b}$, найдем граничное значение коэффициента a_1 :

$$E_{\min} = 2^{-b} = \frac{2^{-b-1}}{1 - |a_{cp}|}; \quad |a_{cp}| = 1 - \frac{2^{-b-1}}{2^{-b}} = 0.5. \quad (3.33)$$

Таким образом, предельные циклы возникают при значении коэффициента $a_1 \geq 0.5$.

В качестве примера рассмотрим БИХ-фильтр первого порядка (табл. 3.1) с разрядностью выходной последовательности $b=4$. Наиболее просто рассчитывается импульсная характеристика при $a_1 = -0.5$, поскольку умножение на 2^{-1} вы-

Таблица 3.1

Пример предельного цикла для звена первого порядка

Система счислен.	a_1	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
2	-0.1000	0.1111	0.0100	0.0001	0	0	0	0	0	0	0
10	-0.125	0.9375	0.25	0.0625	0	0	0	0	0	0	0
2	-1.0000	0.1111	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
10	-0.5	0.9375	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625
2	-1.1000	0.1111	0.1011	0.1000	0.0110	0.0101	0.0100	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010
10	-0.75	0.9375	0.6875	0.5	0.375	0.3125	0.25	0.1875	0.125	0.125	0.125
2	0.0100	0.1111	-0.0100	0.0001	0	0	0	0	0	0	0
10	0.125	0.9375	0.25	0.0625	0	0	0	0	0	0	0
2	0.1000	0.1111	-1.0000	0.0100	-0.0010	0.0001	-0.0001	0.0001	-0.0001	0.0001	-0.0001
10	0.5	0.9375	-5	0.25	-0.125	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625	0.0625	-0.0625
2	0.1100	0.1111	-0.1011	0.1000	-0.0110	0.0101	-0.0100	0.0011	-0.0010	0.0010	-0.0010
10	0.75	0.9375	-0.6875	0.5	-0.375	0.3125	-0.25	0.1875	-0.125	0.125	-0.125

полняется сдвигом числа вправо на один разряд. Начиная с четвертого шага, на выходе устанавливается значение $E_{\text{вых}}=2^{-b-1}/(1-0.5)=2^{-b}=2^{-4}=0.0625$. Такое же амплитудное значение $E_{\text{вых}}=0.0625$ возникает при $a_1=0.5$, закливание происходит на том же шаге, а выходной сигнал имеет форму установившегося колебания с периодом $2T$, где T – период дискретизации.

Таким образом, колебания на выходе возникают при условии $a_1 \geq 0.5$.

3.4. Оценка разрядности при реализации цифровой системы

При построении устройства, реализующего алгоритмы цифровой обработки сигналов, могут использоваться различные устройства: *регистры, умножители, сумматоры и управляющее устройство*, кроме того, в настоящее время выпускаются специализированные *микропроцессоры* для устройств ЦОС [4]. После расчета коэффициентов передаточных функций и выбора структуры управляющего устройства решаются вопросы выбора кодирования чисел (прямой или дополнительный код), способов их представления (с фиксированной или плавающей запятой). Быстродействие устройства управления определяется временной задержкой t_{\min} при прохождении сигнала за один период дискретизации, в течение которого вычисляется очередное значение выходного сигнала. Величина t_{\min} определяется в основном временем выполнения операции умножения двух операндов и числом операций умножения, которые необходимо выполнить для вычисления одного отсчета выходного сигнала. Поэтому *число и время выполнения операции умножения* часто рассматриваются как основной критерий быстродействия и качества реализации устройства управления.

Важным реализационным критерием является *объем оперативной и постоянной памяти*, необходимой для хранения коэффициентов фильтра и результатов выполнения арифметических операций, необходимых для расчета передаточных функций по

уравнению (3.22). Часто для ускорения алгоритмов расчета требуются большие объемы памяти, например для ускорения операции умножения создают таблицы произведений или логарифмов.

Для обеспечения необходимой точности *число разрядов* в данных различно в различных областях применения; например в технике связи обычно число разрядов в данных $m = 8$, в цифровой звукотехнике $m = 16$.

С целью ускорения процессов цифровой обработки сигналов, наряду с применением современной быстродействующей элементной базы, используется ряд алгоритмических и архитектурных методов.

В методе *конвейерной обработки* решаемая задача разбивается на несколько подзадач, например операцию умножения двух операндов можно выполнить за m последовательно выполняемых этапов. Если каждая подзадача (каждый этап) выполняется за время Δt , то операция умножения будет выполнена за время $t_{ум} = m\Delta t$. Однако при выполнении большой последовательности операций умножения важно время, через которое можно начинать очередную операцию умножения, т.е. время Δt . Для реализации конвейерной обработки в системах ЦОС используются специальные *буферные регистры*, в которых хранятся результаты решения отдельных подзадач.

Во многих случаях имеется возможность реализации вычислений с определенной степенью *распараллеливания* операций, что, естественно, также приводит к ускорению процессов ЦОС.

При проектировании систем ЦОС часто требуется обеспечить определенный *динамический диапазон* при заданной величине отношения сигнал/шум. В этом случае по заданным величинам D и $R_{ш}^D$ требуется определить разрядности кодов входного/выходного сигналов, отсчетов обрабатываемого сигнала в различных точках системы. Как правило, разрядности входных и выходных последовательностей полагают одинаковыми.

Выбор разрядности выполняется по следующему алгоритму.

1) Оценивается величина b_D – разрядность цифрового кода входного сигнала, при которой обеспечивается заданная величина динамического диапазона D (без гарантии получения требуемой величины отношения сигнал/шум). Из выражения (3.26) следует:

$$b_D = \frac{D \lg 10}{20 \lg 2} = \frac{D}{20 \lg 2} \approx \frac{D}{6.02}. \quad (3.34)$$

Величину разрядности b_D округляют в большую сторону.

2) Оценивается допустимая величина мощности выходного шума, при которой обеспечивается заданная величина отношения сигнал/шум. Из (3.28) получаем

$$P_{ш, доп} = \sigma_{вых, доп}^2 = \frac{10^{-D/10}}{2 \cdot 10^{R_u^D/10}} = \frac{1}{2} 10^{-\frac{D+R_u^D}{2}}. \quad (3.35)$$

3) Оценивается величина дисперсии собственного шума системы $\sigma_{сист}^2$ по формуле (3.13).

4) Оценивается допустимая величина дисперсии составляющей выходного шума, обусловленной квантованием входного, выходного сигналов, при этом должно выполняться условие:

$$\sigma_{вых, доп}^2 \geq \sigma_{вых, вх}^2 + \sigma_{вых, с}^2 + \sigma_{вых, вых}^2;$$

$$\sigma_{вх+вых}^2 = \sigma_{вых, вх}^2 + \sigma_{вых, вых}^2 \leq \sigma_{вых, доп}^2 - \sigma_{вых, с}^2. \quad (3.36)$$

5) Оценивается величина b_R – разрядность цифрового кода входного/выходного сигналов, при которой обеспечивается заданная величина отношения сигнал/шум (без гарантии получения требуемой величины динамического диапазона). Из выражений (3.17) и (3.13) получим:

$$\sigma_{вх+вых}^2 = \sigma_{вх}^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT) + \sigma_{вых, вых}^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT) \right); \quad (3.37)$$

отсюда следует:

$$b_R = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1 + \sum_{k=0}^{\infty} h^2(kT)}{12 \sigma_{вх+вых}^2}. \quad (3.38)$$

Величину разрядности b_R округляют в большую сторону.

6) Оценивается разрядность входного и выходного сигналов $b_{вх,вых}$, при которой обеспечиваются заданные величины динамического диапазона (3.34) и отношения сигнал/шум (3.38) $b_{вх,вых} = \max(b_D, b_R)$.

7) Оценивается реальная величина отношения сигнал/шум $R_{ш}^D$ при разрядности $b_{вх,вых}$ входного/выходного сигналов. Для этого оценивается величина мощности полного выходного шума

$$P_{ш} = \sigma_{вых}^2 = \sigma_{вх+вых}^2 + \sigma_{вых,с}^2 \quad (3.39)$$

по формуле (3.26) $R_{ш}^D = -D(\text{дБ}) - 3.01 - P_{ш}(\text{дБ})$.

4. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

4.1. Быстрое преобразование Фурье

В ряде задач ЦОС необходимо выполнять *спектральный анализ*. Исходными данными являются элементы ограниченной последовательности $x(nT)$, где $n=0,1,\dots,N-1$. В соответствии с (2.20) *дискретное преобразование Фурье* имеет вид:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)W_N^{kn}, k = 0,1,\dots,N-1; \quad (4.1)$$

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)W_N^{-kn}, n = 0,1,\dots,N-1, \quad (4.2)$$

где $W_N = e^{-j\Omega T} = e^{-j2\pi/N}$ – поворачивающий множитель, причем W_N является периодической последовательностью с периодом N , поскольку $W_N^{kn} = W_N^{(k+mN)n}$, где m – целое. Непосредственное вычисление ДПФ (4.1) для определения комплексных значений $F(k)$ требует для каждого значения k $(N-1)$ умножений и $(N-1)$ сложений комплексных чисел или $4(N-1)$ умножений и $2(N-1)$ сложений действительных чисел, а для всех N значений $k=0, 1, \dots, N-1$ требуется примерно N^2 умножений и N^2 сложений комплексных чисел. Таким образом, для больших значений N (порядка нескольких сотен) прямое вычисление ДПФ требует выполнения весьма большого числа арифметических операций умножения и сложения, что затрудняет реализацию вычислений в реальном времени.

Быстрым преобразованием Фурье (БПФ) называют набор алгоритмов, реализация которых приводит к существенному уменьшению вычислительной сложности ДПФ [4]. Наиболее простыми и широко используемыми являются алгоритмы БПФ с основанием 2. Исходная N -точечная последовательность $x(nT)$ разбивается на две последовательности длиной $N/2$. Вычисляются ДПФ для этих более коротких последова-

тельностью, а из них конструируется ДПФ исходной последовательности. Для двух $N/2$ -точечных последовательностей требуется примерно $2(N/2)^2 = N^2/2$ умножений комплексных чисел, т. е. число умножений (а также сложений) уменьшается примерно в 2 раза. Аналогично вместо вычисления ДПФ $N/2$ -точечной последовательности можно вычислить ДПФ для двух $N/4$ -точечных последовательностей и таким образом вновь уменьшить требуемое число умножений и сложений. Процесс уменьшения размера ДПФ может быть продолжен до тех пор, пока не останутся только 2-точечные ДПФ. При этом общее число этапов вычисления ДПФ будет равно $\nu = \log_2 N$, а число требуемых арифметических операций для вычисления N -точечной ДПФ будет порядка $N\nu$, т. е. уменьшается примерно в $N/\log_2 N$ раз. Так, при $N=1000$ для прямого вычисления ДПФ согласно (4.1) требуется примерно $N^2 = 10^6$ операций комплексных умножений и сложений, а при использовании алгоритмов БПФ таких операций требуется всего порядка $1000/\log_2 1000=100$, т. е. объем вычислений сокращается примерно на три порядка.

Выделяют два алгоритма БПФ: с *прореживанием по времени* (в которых требуется перестановка отсчетов (прореживание) входной последовательности $x(nT)$) и с *прореживанием по частоте* (в которых требуется перестановка (прореживание) отсчетов выходной последовательности $F(k)$).

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени заключается в разбиении исходной последовательности $x(nT)$, где $n=0,1,\dots,N-1$ на две составляющие, содержащие *четные* $x_c(nT)$ и *нечетные* $x_n(nT)$ члены:

$$\begin{aligned} x_c(nT) &= x(2nT), n = 0,1,2,\dots,N/2-1; \\ x_n(nT) &= x((2n+1)T), n = 0,1,2,\dots,N/2-1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При этом ДПФ (4.1) имеет вид:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_c(nT)W_N^{2kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_n(nT)W_N^{(2n+1)k}. \quad (4.4)$$

Поскольку

$$W_N^2 = (e^{-j\frac{2\pi}{N}})^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}, \quad (4.5)$$

получаем

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_u(nT)W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_h(nT)W_{N/2}^{kn} = \\ &= F_u(k) + W_N^k F_h(k), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $F_u(k)$ и $F_h(k)$, ДПФ $N/2$ -точечных последовательностей, состоящих из четных и нечетных точек исходной последовательности $x(nT)$. Функция $F(k)$ должна быть определена для $k=0,1,\dots,N-1$. Учитывая, что функции $F_u(k)$ и $F_h(k)$ имеют период $N/2$, необходимо доопределить (4.6):

$$\begin{aligned} F(k + N/2) &= F_u(k + N/2) + W_N^{k+N/2} F_h(k + N/2) = \\ &= F_u(k) - W_N^k F_h(k), \end{aligned} \quad (4.7)$$

поскольку $W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi(k+N/2)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} e^{-j\pi} = -W_N^k$. Таким образом, в основе алгоритма БПФ лежит выражение:

$$F(k) = \begin{cases} F_u(k) + W_N^k F_h(k), & k = 0, 1, \dots, N/2 - 1 \\ F_u(k) - W_N^k F_h(k), & k = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) определяет базовую операцию БПФ, носит название "бабочка" и изображается в графическом виде (рис. 4.1).

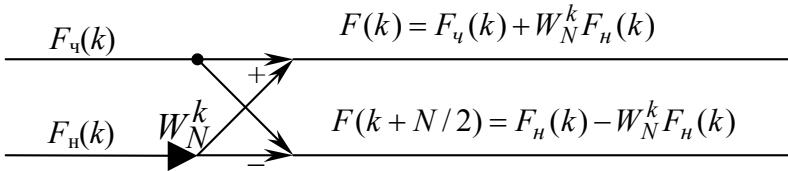


Рис. 4.1. Базовая операция БПФ "бабочка"

Аналогично можно выразить $N/2$ -точечное ДПФ $F_u(k)$ через $N/4$ -точечные ДПФ четных $F_{uц}(k)$ и нечетных $F_{uн}(k)$ членов последовательности $x_u(nT)$, а $N/2$ -точечное ДПФ $F_h(k)$ через

$N/4$ -точечные ДПФ четных $F_{\text{чн}}(k)$ и нечетных $F_{\text{нн}}(k)$ членов последовательности $x_{\text{н}}(nT)$:

$$F_{\text{ч}}(k) = \begin{cases} F_{\text{чч}}(k) + W_N^{2k} F_{\text{нч}}(k), & k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \\ F_{\text{чч}}(k) - W_N^{2k} F_{\text{нч}}(k), & k = N/4, N/4 + 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases};$$

$$F_{\text{н}}(k) = \begin{cases} F_{\text{чн}}(k) + W_N^{2k} F_{\text{нн}}(k), & k = 0, 1, \dots, N/4 - 1 \\ F_{\text{чн}}(k) - W_N^{2k} F_{\text{нн}}(k), & k = N/4, N/4 + 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Процесс уменьшения размера ДПФ продолжается до тех пор, пока на шаге ν не окажутся только две точечные ДПФ $F_{\nu}(k)$, где $k = 0, 1$, для двухточечных последовательностей $x_{\nu}(nT)$, где $n = 0, 1$, определяемые из соотношений:

$$F_{\nu}(0) = x_{\nu}(0T)W_2^0 + x_{\nu}(T)W_2^0 = x_{\nu}(0T) + x_{\nu}(T);$$

$$F_{\nu}(1) = x_{\nu}(0T)W_2^0 + x_{\nu}(T)W_2^1 = x_{\nu}(0T) - x_{\nu}(T). \quad (4.10)$$

Таким образом, вычисление ДПФ на последнем шаге выполняется без операции умножения.

Используя выражения (4.8), (4.9), (4.10), рассмотрим алгоритм БПФ для 8-точечной последовательности $x(nT)$, приведенный на рис. 4.2. Общее число ступеней в алгоритме БПФ равно $\nu = \log_2 N = \log_2 8 = 3$.

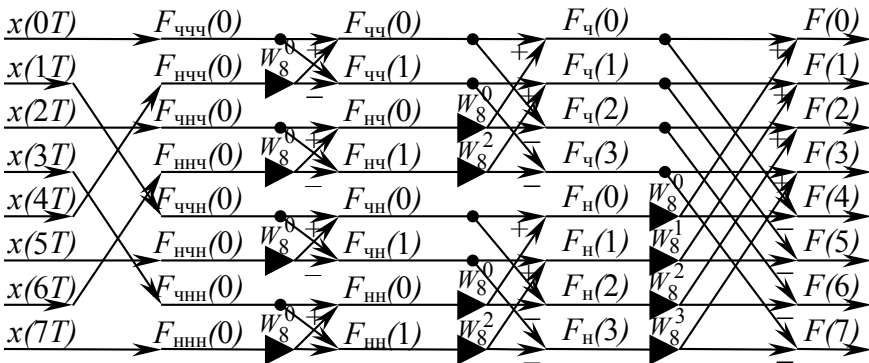


Рис. 4.2. БПФ с прореживанием по времени $N=8$

На каждой ступени обработки выполняется $N=8$ комплексных сложений, и $N/2=8/2=4$ комплексных умножений (число умножений еще меньше, поскольку $W_8^0 = (e^{-j2\pi/8})^0 = 1$). Таким образом, общее количество комплексных сложений $\nu N=3 \cdot 8=24$, и комплексных умножений $\nu(N/2)=3 \cdot 4=12$. Множители на любой ступени можно определить из множителей на последней ступени. Выходная последовательность БПФ получается естественным порядком следования номеров спектра, а входная получается перестановкой исходной последовательности $x(nT)$ в соответствии с двоичным номером индекса ДПФ $F_\nu(k)$. Эта перестановка называется *двоичной инверсией номеров*.

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте заключается в разбиении исходной последовательности $x(nT)$, где $n=0,1,\dots,N-1$ на две последовательности, одна содержит первые $N/2$ отсчетов ($n=0,1,\dots,N/2-1$), а вторая содержит последние $N/2$ отсчетов. При этом ДПФ (4.1) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(nT)W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(nT)W_N^{nk} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(nT)W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x((n+N/2)T)W_N^{(n+N/2)k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Поскольку

$$W_N^{kN/2} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{kN/2} = e^{-j\pi k} = -1^k, \quad (4.12)$$

получаем

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(nT) + (-1)^k x((n+N/2)T))W_N^{kn}. \quad (4.13)$$

Выражения для четных $F_0(k)$ и нечетных $F_1(k)$ отсчетов ДПФ можно определить, подставив вместо k в (4.13) значение $2k$ и $2k+1$:

$$\begin{aligned}
 F(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(nT) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)T \right) W_N^{2kn} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(nT) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)T \right) W_{N/2}^{kn} = F_0(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_0(n) W_{N/2}^{kn}, \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(2k+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(nT) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)T \right) W_N^{(2k+1)n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x(nT) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)T \right) W_N^n W_{N/2}^{kn} = F_1(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{kn}, \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

где $x_0(nT)$ и $x_1(nT)$ – дискретные последовательности ДПФ, которые соответствуют четным $F_0(k)$ и нечетным $F_1(k)$ отсчетам.

Из выражений (4.14) и (4.15) следует, что последовательности $x_0(nT)$ и $x_1(nT)$ определяются соотношениями:

$$x_0(n) = x(nT) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)T;$$

$$x_1(n) = (x(nT) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)T) W_N^n. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) определяет базовую операцию БПФ с прореживанием по частоте и отличается от (4.8) тем, что операция комплексного умножения проводится после операции сложения-вычитания.

Аналогично можно выразить $N/2$ -точечные последовательности $x_0(nT)$, $x_1(nT)$ и перейти от ДПФ порядка $N/2$ к ДПФ порядка $N/4$. Продолжая процесс понижения порядка ДПФ, в конечном итоге получим двухточечное ДПФ.

Используя выражение (4.16), приведем алгоритм БПФ для 8-точечной последовательности $x(nT)$ на рис. 4.3. Входная последовательность располагается в порядке следования номеров, а выходная последовательность подвергается двоично-инверсной перестановке. Полный алгоритм БПФ с прореживанием по частоте и его реализация эквивалентны в смысле количества операций рассмотренному методу БПФ с прореживанием по времени.

На практике мы имеем дело с исходными последовательностями большой длины, а дискретное преобразование Фурье

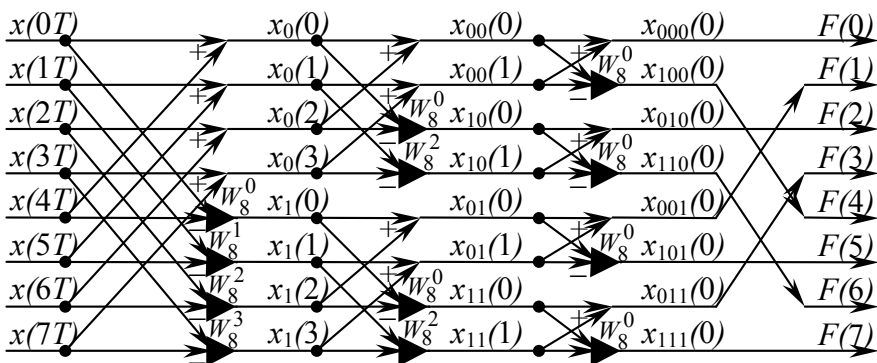


Рис. 4.3. БПФ с прореживанием по частоте $N=8$

применяем лишь к отдельным частям. В этом случае эта отдельная часть трактуется как периодическая последовательность, что приводит к искажению результатов. Например, исходная последовательность a_k имеет вид $1,2,3,\dots$. Предположим, мы решили ограничиться значениями $N=4$. Выбрав первые четыре члена, получим последовательность $1,2,3,4,1,2,3,\dots$ У этой последовательности имеется скачок при переходе от 4 к 1, чего нет в исходной последовательности. Для того чтобы ослабить указанный эффект, используют сглаживающие окна, которые превращают конечную последовательность в периодическую без скачков на концах. Пусть $w(k), k=1,\dots,N-1$ последовательность, для которой $w(0) = w(N-1) = 0$, тогда у последовательности $b_k = w(k)a_k$ не возникает скачка из-за периодического продолжения. Эту последовательность называют *сглаживающим окном*.

Пусть имеется исходная последовательность $a_k, k=0,1,\dots$ большой длины. Требуется изучить ее спектр с помощью ДПФ. Это означает, что на самом деле будет исследована лишь часть последовательности длины N . Выбирают окно соответствующей длины, после чего, передвигая окно вдоль последовательности, получим набор спектральных коэффициентов, зависящих от положения окна. Это и есть *кратковременный*

спектр. Выбор длины окна является компромиссом между точностью и разрешающей способностью. Чем длиннее окно, тем больше коэффициентов будет найдено, но при этом будут получены усредненные по длине окна характеристики.

4.2. Цифро-аналоговые преобразователи

Как следует из названия, *цифро-аналоговые преобразователи* (ЦАП) преобразуют двоичный (или многозначный двоично-десятичный) код в пропорциональное значение напряжения или тока. *Аналого-цифровые преобразователи* (АЦП) выполняют обратное преобразование. Эти преобразования имеют некоторые одинаковые особенности, к ним относятся *шкала* ЦАП и АЦП и *погрешности* ЦАП и АЦП.

Различают ЦАП *параллельного* и *последовательного* (с *широтной-импульсной* (ШИМ) и *частотно-импульсной* модуляцией (ЧИМ)) типов.

Как правило, нулевому значению двоичного кода соответствует нулевое значение аналогового тока или напряжения. Коду, состоящему из одних единиц, соответствует максимальное значение амплитуды аналогового сигнала. Обычно это значение определяется (а зачастую и равно) внешнему опорному напряжению $U_{\text{оп}}$.

Если в двоичном числе b разрядов, то всего оно может иметь $N=2^b$ значений, тогда величина младшего значащего разряда будет равна $U_{\text{max}}/2^b$, где U_{max} – максимальное аналоговое напряжение (опорное напряжение). В этом случае, если цифровой код равен k , то ему соответствует напряжение $U=kU_{\text{max}}/2^b$.

Кроме того, следует отметить, что некоторые преобразователи используют не только двоичный, но и (или) двоично-десятичный коды.

Если преобразователь работает с отрицательными напряжениями, то отрицательные числа, как правило, бывают представлены в двоично-дополнительном коде.

4.2.1. Основные параметры и характеристики ЦАП

1) *Разрешающая способность* характеризуется числом разрядов N . Величина *относительной разрешающей способности* определяется в процентах:

$$\delta = \frac{100\%}{2^N - 1}. \quad (4.17)$$

Абсолютное значение разрешающей способности определяется максимальным выходным напряжением ЦАП:

$$\delta_{ШК} = \frac{U_{ШК}}{2^N - 1}, \quad (4.18)$$

где $U_{ШК}$ – напряжение шкалы.

Например, для $N=12$, то $\delta = 0,0244\%$; при $U_{ШК} = 10\text{В}$, $\delta_{ПШ} = 2,44 \text{ мВ}$.

2) *Абсолютная погрешность преобразования* $\delta_{ПШ}$ – отклонение значения выходного напряжения (тока) от номинального значения, соответствующего конечной точке идеальной характеристики преобразования. Это погрешность полной шкалы. Измеряется в единицах младшего значащего разряда (МЗР).

3) *Нелинейность* δ_L – наибольшее отклонение выходного сигнала от прямой линии идеального преобразования, проведенной через нуль и конечную точку шкалы преобразования. Измеряется в единицах МЗР, не должна выходить за пределы $\delta_L \leq 0,5 \text{ МЗР}$.

4) *Дифференциальная нелинейность* δ_{LD} – характеризует идентичность соседних приращений сигнала. Это отклонение разности двух аналоговых сигналов, соответствующим соседним кодам, от значения единицы МЗР. Измеряется в единицах МЗР. Если $\delta_{LD} > 1 \text{ МЗР}$ – преобразование немонотонно.

5) *Монотонность преобразования* – идентичность знаков приращения мгновенных значений входного и выходного сигналов преобразователя. Это качественный показатель.

6) *Время установления выходного напряжения* $t_{уст}$ – интервал времени от подачи входного сигнала до вхождения вы-

ходного напряжения в пределы зоны ошибки, соответствующий 1МЗР.

7) f_{\max} – максимальная частота преобразования, при которой параметры ЦАП соответствуют установленным нормам.

4.2.2. Параллельные ЦАП

Все параллельные ЦАП (в отличие от последовательных) имеют высокое быстродействие – от 0.1 до 10 мкс, точность – 10-14 двоичных разрядов, но должны быть реализованы в виде отдельных устройств (они допускают лишь аппаратную, но не программную реализацию).

Разновидности параллельных ЦАП:

- ЦАП с весовыми источниками тока;
- ЦАП с весовыми резисторами;
- многозвенная цепная схема.

Две последние разновидности ЦАП могут быть умножающими. В них опорное напряжение может изменяться в широких пределах и даже менять полярность. Такие ЦАП могут быть использованы в качестве усилителей или ослабителей аналогового сигнала, коэффициент передачи которого управляется двоичным кодом. Кроме того, иногда в виде интегральной микросхемы выполняют не функционально-законченный ЦАП, а только резисторную матрицу с ключами. В этом случае для построения полного ЦАП требуется внешний операционный усилитель.

На рис. 4.4 приведена схема ЦАП с весовыми источниками тока. Замыкание ключа K_1 приводит к увеличению выходного тока на I_M одну единицу младшего значащего (нулевого) разряда, K_2 – на одну единицу следующего разряда (первого) и т.д. до старшего значащего разряда.

Недостатком данной схемы является сложность реализации источников тока, что приводит к трудности создания ЦАП. Поэтому данная схема существенно менее распространена, чем схема ЦАП с весовыми резисторами, приведенная на рис. 4.5. Она представляет собой умножитель напряжения с изменяемым коэффициентом умножения.

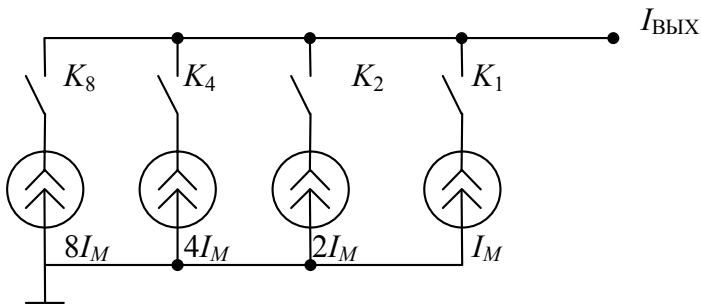


Рис. 4.4. Схема ЦАП суммирования весовых токов

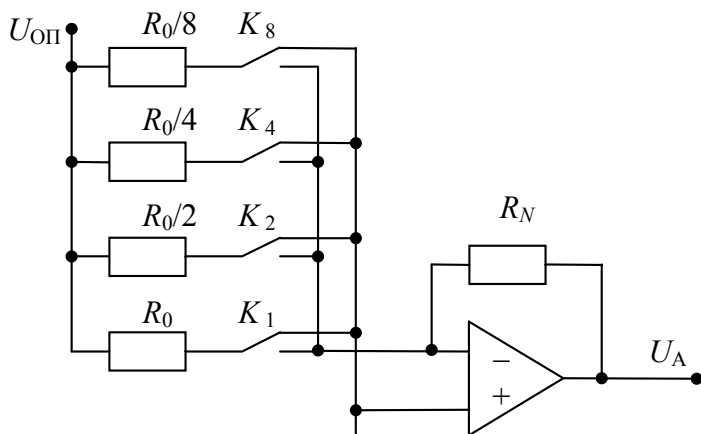


Рис. 4.5. Схема ЦАП с весовыми резисторами

При замыкании ключей $K_1 - K_8$ опорное напряжение через резисторы подается на инвертирующий вход операционного усилителя. Таким образом, выходное напряжение U_A получается в результате умножения опорного напряжения $U_{ОП}$ на коэффициент, пропорциональный цифровому коду:

$$\begin{aligned}
 U_A &= -\left(\frac{R_N}{R_0} K_1 + \frac{2R_N}{R_0} K_2 + \frac{4R_N}{R_0} K_4 + \frac{8R_N}{R_0} K_8\right) U_{ОП} = \\
 &= -\frac{U_{ОП} R_N}{R_0} K.
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Для увеличения числа разрядов следует увеличивать число параллельно включенных резисторов. Жесткие требования предъявляются к точности резисторов, т.к. разброс параметров не должен превышать тока младшего разряда:

$$\frac{\Delta R_N}{R_N} \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (4.20)$$

где ΔR_N – абсолютная погрешность резистора, R_N – номинальное значение резистора. Например, для $N=4$ точность составляет $\frac{\Delta R_N}{R_N} \leq 3\%$, для $N=10$ $\frac{\Delta R_N}{R_N} \leq 0.05\%$.

Эта схема позволяет (в отличие от схемы с весовыми источниками тока) получать умножающие ЦАП, но имеет недостаток – сложность формирования большого числа прецизионных сопротивлений с сильно различающимся номиналом в составе одной микросхемы.

Этого недостатка лишена схема ЦАП с делителем напряжения, показанная на рис. 4.6.

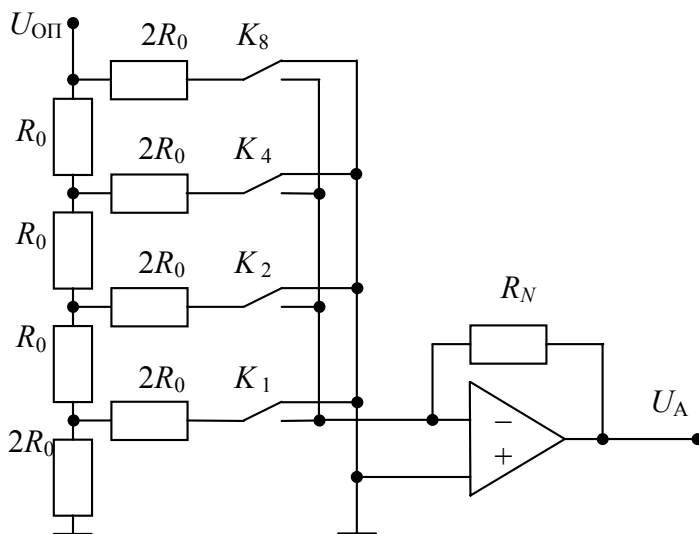


Рис. 4.6. Схема ЦАП с делителем напряжения

В этой схеме используется *резистивная матрица* – делитель напряжения. Поскольку напряжение на инвертирующем входе операционного усилителя близко к нулю, при любом положении ключей $K_1 - K_8$, каждое звено делит напряжение пополам. Таким образом, делитель формирует ряд напряжений: U_{OP} , $U_{OP}/2$, $U_{OP}/4$, $U_{OP}/8$. Ключи $K_1 - K_8$ коммутируют ток, протекающий через резистор R_N в обратной связи операционного усилителя, поскольку входной ток операционного усилителя мал. Следовательно, выходное напряжение U_A определяется выражением:

$$U_A = -R_N \left(\frac{U_{OP}}{8 \cdot 2R_0} K_1 + \frac{U_{OP}}{4 \cdot 2R_0} K_2 + \frac{U_{OP}}{2 \cdot 2R_0} K_4 + \frac{U_{OP}}{2R_0} K_8 \right) =$$

$$= -\frac{R_N}{2R_0} U_{OP} K. \quad (4.21)$$

4.2.3. Последовательные или интегрирующие ЦАП

Цифро-аналоговые преобразователи данного типа представляют собой электрический ключ, периодически замыкаемый и размыкаемый и формирующий импульсы (рис. 4.7, а). Преобразователи данного типа могут работать либо по принципу преобразования частоты формируемых импульсов в напряжение (ЧИМ), либо с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), как показано на рис. 4.7, б.

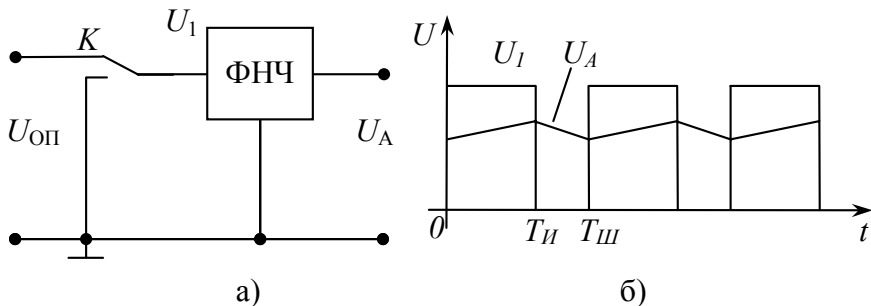


Рис. 4.7. Последовательные или интегрирующие ЦАП

Сформированный импульсно-модулированный сигнал достаточно проинтегрировать (используя фильтр, подавляющий высокочастотную составляющую) для получения среднего значения. В качестве интегратора в таких ЦАП зачастую выступает нагрузка.

Для формирования импульсной последовательности с управляемой частотой или длительностью может быть применен таймер или использована программная реализация этой задачи.

Последовательные ЦАП более медленные, чем параллельные, как правило, менее точные, но существенно более дешевые, поскольку в некоторых случаях вообще не требуют никаких дополнительных устройств.

4.3. Аналого-цифровые преобразователи

АЦП предназначены для преобразования непрерывного сигнала в пропорциональный ему код. Выделяют 3 метода преобразования:

- 1) *параллельный*;
- 2) *весовой* (поразрядное взвешивание);
- 3) *числовой*.

4.3.1. Параллельные АЦП

Схема трехразрядного АЦП приведена на рис. 4.8. Входной сигнал подается на инвертирующие входы компараторов (DA1-DA8), соединенные параллельно. Компараторы сравнивают входной сигнал с эмпирическими напряжениями, формируемыми входным делителем, подключенным к $U_{ОП}$. Количество включенных компараторов преобразуется в двоичный код при помощи приоритетного шифратора DD1. Значения младших разрядов при этом не играют роли.

Между компаратором и шифратором может быть установлена схема запоминания для сохранения стационарного состояния выходов между поступлением тактовых импульсов.

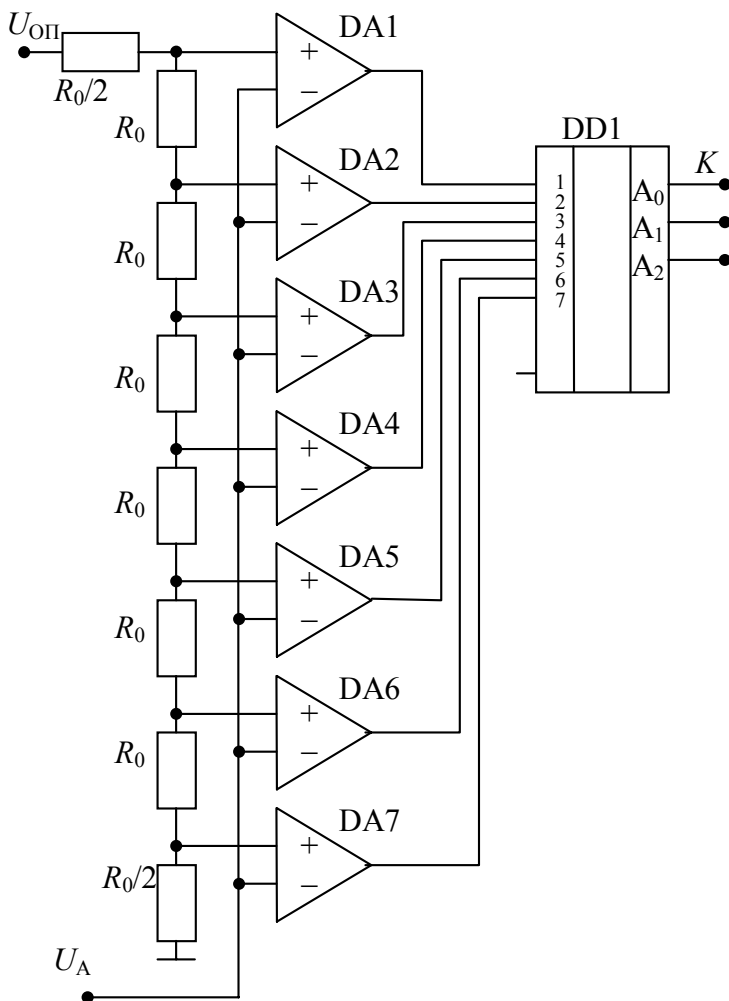


Рис. 4.8 Параллельный АЦП

Результат получается за один шаг. Схема обладает высоким быстродействием, достигающим десятков наносекунд, но аппаратные затраты велики. На каждое возможное значение U_A с заданной разрешающей способностью необходим отдельный компаратор.

Поскольку АЦП данного типа, как правило, имеют быстроедействие, большее чем микропроцессорная система, то данные с выхода АЦП рекомендуется сохранять в быстродействующее буферное ОЗУ.

4.3.2. Весовой метод

В этом методе количество шагов сравнения определяется числом разрядов выходного кода. На каждом шаге методом половинного деления определяется значение одного разряда. Схема, реализующая весовой метод, приведена на рис. 4.9. АЦП последовательных приближений состоит из компаратора, на один вход которого подается входное напряжение, а на другой – сигнал от ЦАП.

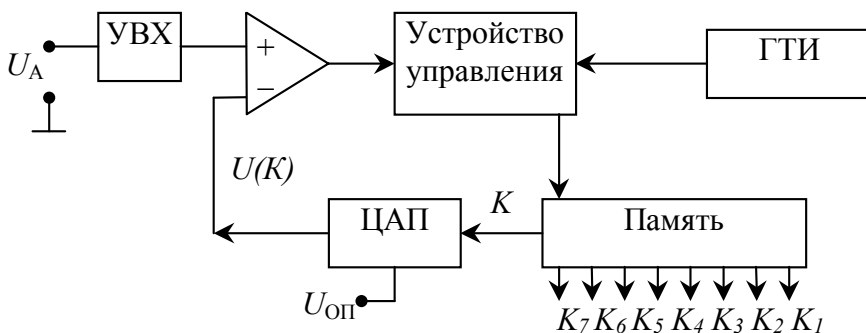


Рис. 4.9. Схема АЦП весового метода

Перед началом преобразования устройство управления обнуляет разряды K_i . Затем устанавливается старший разряд и сформированное на выходе компаратора значение записывается в старший разряд. Это повторяется для остальных разрядов.

Первое приближение равно половине максимального значения, далее выясняется, больше входное напряжение этого значения или меньше, в следующем цикле интервал, в котором находится входное напряжение, делится еще пополам и т.д. Каждый цикл приближения дает один правильный двоичный разряд результата, начиная со старшего. Устройство выборки

хранения (УВХ) необходимо для поддержания величины аналогового сигнала, чтобы все разряды были получены, исходя из одного и того же значения аналогового сигнала.

Рассмотренный способ построения АЦП имеет по сравнению с интегрирующими и параллельными АЦП среднее быстродействие (время преобразования – 1...10 мкс) и среднюю точность – 10...14 двоичных разрядов. К недостаткам данного метода относится большая чувствительность к импульсным помехам, а к достоинствам – хорошее согласование по времени измерения с типичными микропроцессорными системами, невысокая стоимость и сложность.

Возможна программная реализация блока управления ЦАП. Это дает возможность за счет использования более сложных алгоритмов выработки пробных значений напряжения улучшить параметры (точность и быстродействие) АЦП данного типа. Например, использование начальных предположений о значении сигнала позволяет снизить количество циклов преобразования. Систематические погрешности неточности работы ЦАП могут быть компенсированы использованием таблицы перекодировки.

4.3.3. Модифицированный параллельный метод

Модифицированный параллельный метод сочетает параллельный и весовой методы (рис. 4.10). Преобразование осуществляется в два этапа. На первом этапе преобразуются

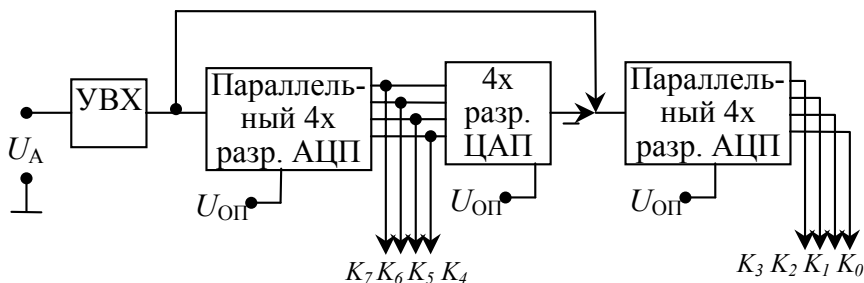


Рис. 4.10. Схема АЦП модифицированного метода

параллельным методом четыре старших разряда кода. Затем с помощью ЦАП образуется аналоговое напряжение, которое вычитается из входного. Остаток преобразуется вторым параллельным четырехразрядным АЦП. За время общего преобразования входной сигнал не должен изменяться, поэтому в схеме участвует устройство выборки-хранения (УВХ).

4.3.4. Числовой метод

Отличие заключается в малых аппаратных затратах. Но время преобразования больше, чем во всех других методах. Схемные варианты предполагают несколько разновидностей:

- 1) компенсационный метод;
- 2) метод пилообразного напряжения;
- 3) метод двойного интегрирования.

4.3.4.1. *Компенсационный метод.* Схема (рис. 4.11) выполняет процесс преобразования непрерывно. Разность входного сигнала и выходного сигнала ЦАП поступает на схему переключения, которая устанавливает направление счета реверсивного двоичного счетчика. На его выходе формируется код, пропорциональный входному аналоговому сигналу. Такой аналого-цифровой преобразователь отслеживает входной сигнал и называется *отслеживающим*.

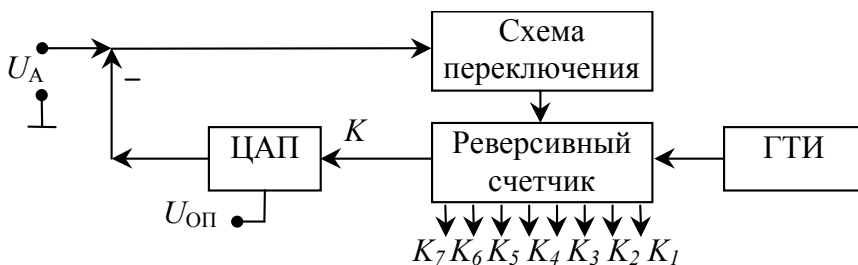


Рис. 4.11. Схема АЦП компенсационного метода

АЦП имеет низкую скорость преобразования, поскольку компенсационное напряжение изменяется шагами величиной

1МЗР. Используют такие АЦП для медленно меняющихся сигналов, т.к. в этом случае время преобразования мало, поскольку преобразование происходит непрерывно.

4.3.4.2. *Метод пилообразного напряжения.* Схемное решение метода пилообразного напряжения представлено на рис. 4.12. Измеряемая величина U_A сравнивается с напряжением, формируемым генератором пилообразного напряжения (ГПН). Напряжение ГПН меняется в диапазоне $-U_{ОП} \div +U_{ОП}$ по закону:

$$U_{П} = \frac{U_{ОП}}{\tau} \cdot t - U_0, \quad (4.22)$$

где τ – постоянная времени ГПН.

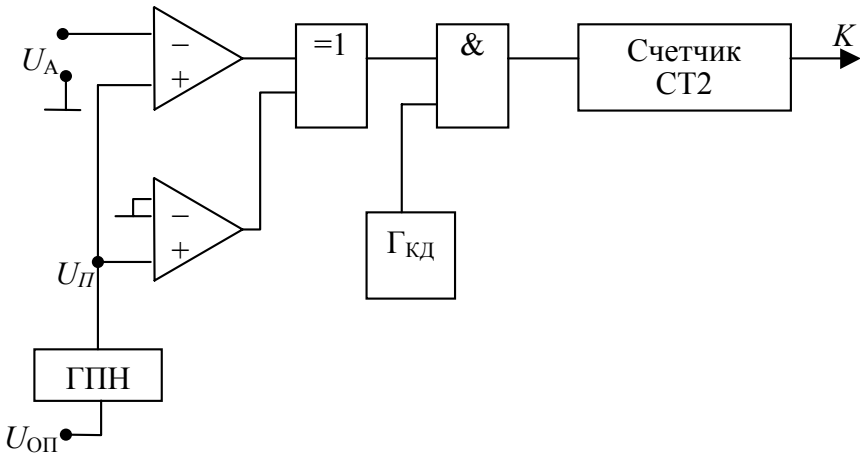


Рис. 4.12. Схема АЦП пилообразного напряжения

На выходе логического элемента исключающее «или» сохраняется единичное состояние до тех пор, пока напряжение пилы находится в диапазоне от 0 до U_A . Это время составляет:

$$\Delta t = \frac{\tau}{U_{ОП}} \cdot U_A. \quad (4.23)$$

Для его определения подсчитывают число колебаний кварцевого генератора. Если перед началом измерения счетчик был обнулен, то при превышении верхнего порога компаратора в счетчик будет записан код. Если напряжение отрицательно, то пила достигает значения U_A , а затем переходит через 0. По этому признаку определяется знак измеряемого напряжения. После каждого измерения счетчик обнуляется, а пилообразное напряжение принимает начальное значение.

Недостаток: метод имеет большую подверженность влиянию температуры и времени из-за дрейфа емкости ГПС, поэтому трудно обеспечить точность выше 0.1%.

4.3.4.3. Метод двойного интегрирования. В интегрирующих АЦП преобразование осуществляется в два этапа. На первом этапе входной аналоговый сигнал интегрируется, и это проинтегрированное значение преобразуется в импульсную последовательность. Частота следования импульсов в этой последовательности или их длительность бывает промоделирована проинтегрированным значением входного сигнала.

На втором этапе эта последовательность импульсов преобразуется в цифровой код – измеряется ее частота или длительность импульсов.

Общие достоинства:

➤ АЦП данного типа нечувствительны к импульсным помехам.

➤ АЦП данного типа нечувствительны к периодическим помехам, если их период в целое число раз меньше периода интегрирования.

➤ В результате АЦП данного типа являются наиболее точными – типичная точность – 4...6 десятичных знаков, что соответствует 14...20 двоичным разрядам.

➤ При работе АЦП данного типа в составе микропроцессорной системы возможна программная реализация части измерительной процедуры, а именно второго этапа – измерения

временных характеристик последовательности импульсов, что упрощает преобразователь.

Общие недостатки:

Преобразователи данного типа являются наименее быстродействующими из всех – типичное время преобразования – 1 ... 1000 мс.

На рис. 4.13 приведена схемная реализация метода двойного интегрирования. В этой схеме интегрируется не только входное, но и опорное напряжение.

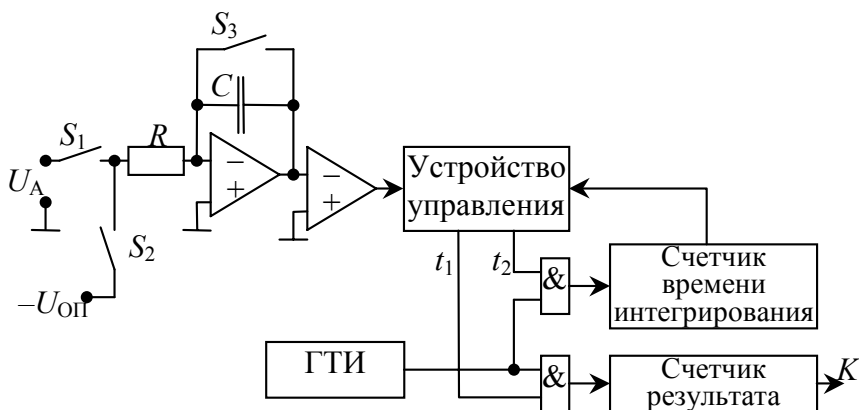


Рис. 4.13. Схема АЦП по методу двойного интегрирования

В исходном состоянии ключи S_1 и S_2 разомкнуты, S_3 – замкнут. Измерение начинается с первого этапа, когда интегрируется аналоговое напряжение U_A . Для этого ключ S_1 – замыкается, а S_3 – размыкается. Время интегрирования постоянно. В качестве таймера используется счетчик времени интегрирования. К моменту окончания интегрирования на выходе интегратора имеется напряжение:

$$U_I(t_1) = -\frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} U_A dt = -\frac{U_A n_1 T}{\tau}, \quad (4.24)$$

где n_1 – число тактовых импульсов, T – период тактового генератора.

Далее начинается второй этап. S_1 – размыкается, S_2 – замыкается, $U_{\text{оп}}$ поступает на интегратор. Так как $U_{\text{оп}}$ имеет противоположный знак по отношению к U_A , то U_I на выходе интегратора начинает уменьшаться. Счетчик результата начинает считать время t_2 до момента, когда $U_I=0$:

$$t_2 = n_2 T = \frac{\tau}{U_{\text{оп}}} |U_I(t_1)|, \quad (4.25)$$

тогда $K = n_2 = \frac{U_A}{U_{\text{оп}}} n_1$. Таким образом, тактовая частота $1/T$ и постоянная времени $\tau = RC$ не влияют на результат измерения.

Достоинством данного варианта построения интегрирующего АЦП является независимость результата преобразователя от емкости интегрирующего конденсатора и пропорциональное изменение длительности второго такта при изменении длительности первого. Это позволяет снизить требования к точности тактовой частоты. В результате именно этот тип преобразователя используется в большинстве цифровых измерительных приборов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее время разработка микропроцессорных систем автоматического управления все более преобладает над аналоговыми системами. Развитие однокристалльных микропроцессоров позволяет создавать компактные и дешевые цифровые системы управления. В связи с этим необходим общий теоретический подход к разработке цифровых систем. В качестве такой теории выступает цифровая обработка сигналов. Она позволяет не только создать цифровую систему управления, аналогичную аналоговой, но и получать такие системы управления, которые по своим характеристикам не могут быть реализованы аналоговыми методами. Например, методами цифровой обработки сигналов могут быть получены корректирующие звенья, обладающие линейными амплитудно-частотными или фазо-частотными характеристиками. Кроме того, использование микропроцессорной техники позволяет создавать сложные алгоритмы адаптивного управления. С другой стороны, разработчики могут накапливать программные модули с целью дальнейшего использования, что позволяет сократить время разработки системы управления в целом.

Однако микропроцессору необходимо определенное время, чтобы проанализировать входные сигналы в системе управления и рассчитать управляющее воздействие. Кроме того, все расчеты выполняются с определенной точностью в зависимости от разрядности данных. Таким образом, в процессе разработки цифровых систем необходимо решать вопросы, связанные с дискретизацией и квантованием сигналов. Если допустить, что число разрядов цифровой обработки сигнала велико, то систему управления можно рассматривать как линейную дискретную систему. Практическая реализация системы управления требует выбора разрядности с учетом эффектов квантования, которые в общем случае делают систему нелинейной. Поиск компромисса между такими противоречивыми

параметрами, как *частота дискретизации*, *число уровней квантования*, *частота процессора* – неизбежно приводит к быстрым алгоритмам цифровой обработки сигналов. Примерами таких алгоритмов являются быстрое преобразование Фурье, быстрое умножение и т.д. Правильный выбор основных параметров системы решающим образом сказывается на стоимости управляющего микропроцессора и системы управления в целом. Таким образом, знание теории цифровой обработки сигналов является необходимым разработчику современных технических систем автоматического управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1990.
2. Иванов В.А., Ющенко А.С. Теория дискретных систем автоматического управления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 336 с.
3. Калабеков Б.А. Микропроцессоры и их применение в системах передачи и обработки сигналов. М.: Радио и связь, 1988.
4. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – СПб.: Политехника, 1999. 592 с.: ил.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
6. Сигалов Г.Г., Мадорский Л.С. Основы теории дискретных систем управления. Минск: Вышэйш. шк., 1973. 336 с.
7. Микропроцессорное управление электроприводами станков с ЧПУ. / Э.Л. Тихомиров, В.В. Васильев, Б.Г. Коровин, В.А. Яковлев. М.: Машиностроение, 1990. 320 с.: ил.
8. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике / Под ред. Л.М. Гольденберга. М.: Радио и связь, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Математическое описание сигнала	5
1.1. Спектры дискретных сигналов	8
1.2. Связь между аналоговыми и дискретными сигналами	11
1.3. Дискретное преобразование Фурье	14
1.4. Z-преобразование	17
1.5. Рекурсивное и нерекурсивное представление сигналов	23
2. Дискретные системы	26
2.1. Передаточные функции дискретных систем	27
2.2. Структурные схемы дискретных систем	28
2.3. Временные характеристики дискретных фильтров ..	30
2.4. Связь передаточной функции с импульсной характеристикой	31
2.5. Фильтры с конечной и бесконечной импульсными характеристиками	32
2.6. Разностные уравнения (алгоритмы дискретных фильтров)	35
2.7. Нули и полюса передаточной функции	37
2.8. Устойчивость и реализуемость дискретных фильтров	37
2.9. Частотные характеристики линейных дискретных фильтров	43
2.10. Метод отображения дифференциалов	47
2.11. Метод билинейного преобразования	49
2.12. Передаточные функции замкнутых импульсных систем	53
2.13. Системы управления с дискретным фильтром	56
2.14. Основные типы дискретных фильтров	58
2.15. Обеспечение линейности фазовой характеристики	62
2.16. Методы расчета дискретных фильтров	67

3. Эффекты квантования цифровой обработки сигналов . . .	71
3.1. Формы представления чисел	72
3.2. Оценка ошибок квантования	74
3.3. Предельные циклы	83
3.4. Оценка разрядности при реализации цифровой системы	86
4. Прикладные задачи цифровой обработки сигналов	90
4.1. Быстрое преобразование Фурье	90
4.2. Цифро-аналоговые преобразователи	97
4.2.1. Основные параметры и характеристики ЦАП	98
4.2.2. Параллельные ЦАП	99
4.2.3. Последовательные или интегрирующие ЦАП	102
4.3. Аналого-цифровые преобразователи	103
4.3.1. Параллельные АЦП	103
4.3.2. Весовой метод	105
4.3.3. Модифицированный параллельный метод	106
4.3.4. Числовой метод	107
Заключение	112
Библиографический список	114

Учебное издание

Бушнев Дмитрий Викторович
Романов Андрей Владимирович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЦИФРОВОЙ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Редактор С.А. Образцова

Выпускающий редактор И.В. Медведева

Компьютерный набор Д.В. Бушнева, А.В. Романова

Подписано в печать 23.03.2005.

Формат 60x84/16. Бумага для множительных аппаратов.

Усл.печ.л 7,4. Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 120 экз.

Зак. №

Воронежский государственный технический университет
394026 Воронеж, Московский просп., 14